

Lezione 11

15/10/2020

8.30-10.15

ES 1 (CASA) Sia (a_n) una succ. di numeri reali positivi. Allora

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$$

E il viceversa $\Leftarrow$ in generale è

falso: esiste un controesempio, cioè trovare una succ. (a_n) di numeri positivi infinitesimi ($\Rightarrow$ che tende a zero)

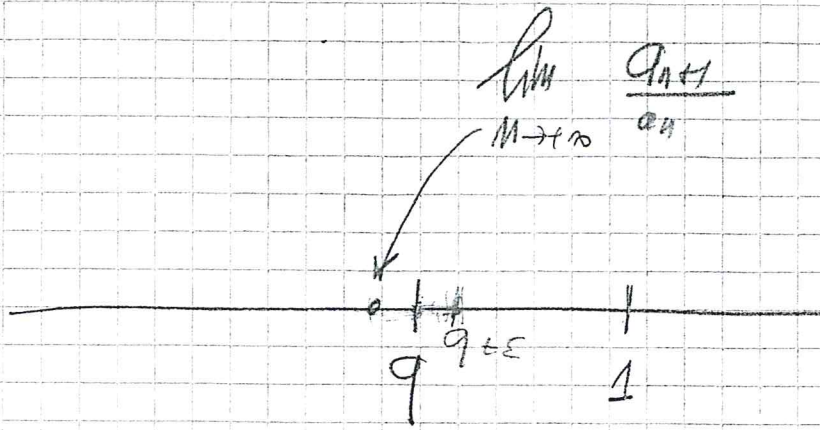
ma per la quale $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty$.
(è legato anche all'unicità delle code di una serie)

ES 2 (CASA) Sia (a_n) una succ. di numeri > 0 , e supponiamo che

$$\exists q \in (0, 1) : \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q \quad (1.1)$$

Allora $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty$

(È legato al criterio del rapporto e al test permanente del segno)



$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

Nota: dalla (1.1) non posso dedurre

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q \quad \text{def. in } n$$

Ma l'idea è: se $\epsilon > 0$ è preso in modo che $q + \epsilon < 1$, dalla def. di limite ho $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q + \epsilon$ def. in n , e posso applicare il criterio del rapporto con $q + \epsilon$ al posto di q .

Supponiamo $\exists q > 1$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq q$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = +\infty.$$

ES 3 (**) Dimostrare che
la successione

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \text{ è strett. decrescente}$$

ES 4 Se $a_n \rightarrow a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

$b_n \rightarrow b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, Allora

$a_n + b_n \rightarrow a + b$ purché eviti i casi
 $a = +\infty$ e $b = -\infty$, o $a = -\infty$ e $b = +\infty$

esempi: $a_n = n$, $b_n = -n$, $a_n + b_n = 0$

$a_n = n^2$, $b_n = -n$, $a_n + b_n \rightarrow +\infty$

$a_n = -n^2$, $b_n = n$, $a_n + b_n \rightarrow -\infty$

ES 5

$$a_n \rightarrow a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

$$b_n \rightarrow b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

$$a_n \cdot b_n \rightarrow ab \quad \text{provided either } i \text{ or } ii$$

$$a=0 \text{ e } b=\pm\infty, \quad a=\pm\infty \text{ e } b=0,$$

$$a=\pm\infty \text{ e } b=0, \quad a=0 \text{ e } b=0.$$

ES 6

$$a_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$a_n \rightarrow a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

Allora

$$\frac{1}{a_n} \rightarrow \frac{1}{a}$$

provided $a \neq 0$, e in
intende $\frac{1}{+\infty} = 0, \frac{1}{-\infty} = 0$

Esempio

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n} \rightarrow 0$$



$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{\frac{(-1)^n}{n}} = \frac{n}{(-1)^n} = (-1)^n n$$

$\left(\frac{1}{a_n}\right)$ non ammette limite, non posso dunque
scrivere $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{a_n}$, ma

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{a_n} = -\infty, \quad \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{a_n} = +\infty$$

In generale, se (c_n) ha a. l.
 numeri reali, dire che $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = -\infty$
 equivale a dire che (c_n) ammette
 una sottoscc. (c_{n_k}) tale che

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} c_{n_k} = -\infty.$$

Continuare dim. teo pg 11 lemm 11
 Ricordo che resta da dim. (vedi pg 17 riv.)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e_n \geq e \quad (5.1)$$

Questo è per la parte più difficile
 Fissiamo $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$; abbiamo

$$\sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} P_{k,n} < \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} P_{k,n} = e_n$$

(usando i ragionamenti simili a quelli
 di ieri). Passando al limite $n \rightarrow +\infty$
 lasciando m fisso

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} P_{k,n} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} e_n = e \quad (6.1)$$

Nota Se $a_n < b_n \stackrel{\text{def. in } n}{\sqrt{e}} \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n, \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$



$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$$

Anche $k \ a_n \leq b_n \stackrel{\text{def. in } n}$

$$e \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n, \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n,$$



$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$$

(quindi non si mantiene in generale la
disuguaglianza stretta)

? $k \ a_n < b_n \stackrel{\text{def. in } n} \Rightarrow \liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} b_n$

$\Rightarrow \limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} b_n$? $\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} b_n$

Robbiamo a sfidare di sia bene

definito il membro sinistro della (6.1):
dato che m è fisso (e non dipende da n)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} P_{k,n} = \sum_{k=0}^m \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{k!} P_{k,n} \right)$$

perché quando dei $\xrightarrow{\quad}$ esika,

e non accade " $+\infty - \infty$ " (es. 4)?

si vede subito che non può accadere

$$\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{k!} P_{k,n} \right) \Leftrightarrow \exists \frac{1}{k!} \lim_{n \rightarrow +\infty} P_{k,n}$$

« $\frac{1}{k!}$ esce e entra dal $\lim_{n \rightarrow +\infty}$ »

Cosa fa allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P_{k,n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \right]$$

limite prodotto di k oppelli, k è fisso qui,
 $k \in \{0, \dots, m\}$, e m era fisso

$$\stackrel{\text{es. 5}}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{(1 \cdot 1 \cdots 1)}_{n^{\circ} \text{ finito prod di } 1} = 1$$

Tutto questo dimostra che il
 membro sinistro della (6.1) è ben
 definito, e in

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} P_{k,n} = \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!}$$

È dunque la (6.1) diventa

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} \leq \lim_{m \rightarrow +\infty} e_n \quad (8.1)$$

Finalmente, passando al limite in $m \rightarrow +\infty$
 nella (8.1), deduc

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} \leq \lim_{m \rightarrow +\infty} e_n$$

||
 e

e questo dimostra la (5.1)

□