

Lezione 10 16/10/2020

10.15 - 12.45

1

Prossimo ricevimento telefonico ^{domani} $\sqrt{13.30}$ -

Dobbiamo dim. 1), 2) della pag 7
lezione 9.

$l^+ = \limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n \in \mathbb{R}$ Ricordiamo

1) _{def} $\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : a_n < l^+ + \varepsilon \quad \forall n > \bar{n}$

2) _{freg} $\forall \varepsilon > 0$ vi sono infiniti $n \in \mathbb{N} :$
 $l^+ - \varepsilon < a_n$

Ricordiamo

$$l^+ = \inf_{n \in \mathbb{N}} \left(\sup_{k > n} a_k \right)$$

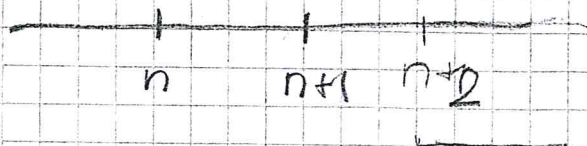
$\parallel$
 b_n

oss (b_n) è decrescente

$$b_{n+1} \leq b_n$$

(c_n) è crescente

$$c_{n+1} \geq c_n$$



Vedremo che le successioni monotone
(siano esse crescenti o decrescenti)

ammettono sempre limite (finito o
infinito); se sono crescenti il limite $= \sup$
se sono decrescenti " " $= \inf$
e dunque

$$l^+ = \inf_{n \in \mathbb{N}} b_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{k > n} a_k$$

$$l^- = \sup_{n \in \mathbb{N}} c_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n =$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \inf_{k > n} a_k$$

Tornando a 1), 2), usiamo

$$l^+ = \inf_{n \in \mathbb{N}} b_n,$$

in particolare usiamo la CARATTERIZZAZIONE
pag 10 lemma 5, con la seguente
scelta: $\lambda = l^+$, $E = \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$

$$l^+ \quad e^- \quad \inf_{n \in \mathbb{N}} b_n$$



$$1) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} : l^+ + \varepsilon > b_n$$

$$2) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad l^+ \leq b_n$$



$$1) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} : l^+ + \varepsilon > \sup_{k > n} a_k$$

$$2) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad l^+ \leq \sup_{k > n} a_k$$

Guardando la 1), dato che

$$\sup_{k > n} a_k \geq a_m \quad \forall m > n$$

e dunque, dalla 1),

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} : l^+ + \varepsilon > a_m \quad \forall m > n$$

che è esattamente la 1) def di pag 1 (diciamo $\bar{m} = m$, e $m = m$)

Resta da dim. 2) f_{reg} , cercando di usare

la 2)

(limite finito di una successione)
Def ✓ Sia (a_n) una succ. reale.

Sia $l \in \mathbb{R}$. Si dice che (a_n) tende a l ,
 o che $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l$, se:

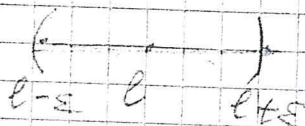
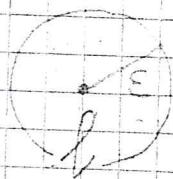
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} = \bar{n}(\varepsilon) \in \mathbb{N} : |a_n - l| < \varepsilon \quad \forall n > \bar{n} \quad n \in \mathbb{N}$$

(cioè quanto scritto in rosa nella fine
 di pag 7, lezione 9)

Come dare la def di $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$?

Fisso ε :

a_n cerca



nella pallina centrata in l di raggio ε
 per $n > \bar{n}$

Def (limite $+\infty$ di una successione)

$$\forall M \in \mathbb{R}$$

$$\exists \bar{n} = \bar{n}(M) \in \mathbb{N}$$

$$a_n > M$$

$$\forall n > \bar{n} \quad n \in \mathbb{N}$$

$a_n \in (M, +\infty)$

Osservazione :

$$\bullet \quad l^- \leq l^+$$

$$\bullet \quad l^- = l^+ \in \mathbb{R} \cup \{\pm \infty\}$$



$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l^- (= l^+) \in \mathbb{R} \cup \{\pm \infty\}$$

ES

Dimostrare

che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}} = 0$$

« Lo faremo usando la def. a pag 5,
e non avendo ^{la ora} alcuno strumento (o
teorema) a disposizione, devo per
forza usare $\varepsilon, \bar{n}$. »

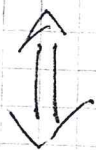
Durante il corso, daremo tante volte
la il calcolo dei limiti, evitando
il metodo $\varepsilon, \bar{n}$.

$$? \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} = \bar{n}(\varepsilon) \in \mathbb{N} : |a_n| < \varepsilon \quad \forall_{\substack{n > \bar{n} \\ n \in \mathbb{N}}}$$

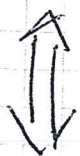
Sta $\varepsilon > 0$;

$$\frac{\text{cerco } \bar{n}}{\left| \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}} \right| < \varepsilon \quad \forall n > \bar{n}}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}} < \varepsilon$$



$$\frac{1}{\varepsilon} < \sqrt[3]{n+1}$$



$$\frac{1}{\varepsilon^3} < n+1 \iff n > \frac{1}{\varepsilon^3} - 1$$

$$\bar{n} = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon^3} - 1 \right\rfloor + 1 \in \mathbb{N}$$

$$\bar{n}(\varepsilon)$$

ES (Case)

Annahme da

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^4 + 5/2}{n^2 + 1} = +\infty$$

Ritagliandoci a quanto scritto a pag 2:
Teo (fondamentale delle successioni
monotone)

Sia (a_n) una succ. reale $\forall$ monotona crescente.

Allora

$$\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup a_n \quad (8.1)$$

Cioè "rank, finito o $+\infty$, il

limite di (a_n) per $n \rightarrow +\infty$, e tale

$$\limite = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup a_n \Rightarrow$$

Questo è il teo che ci permette di
scrivere

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n &= \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{k \geq n} a_k \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{k \geq n} a_k \end{aligned}$$

che spiega perché $\limsup$ indica $\limsup$.

9

Dim Vi sono due casi:

1° caso) (a_n) limitata superiormente

2° caso) (a_n) non limitata superiormente.

1° caso) Sia (a_n) limitata superiormente,
cioè $\exists K \in \mathbb{R}: a_n \leq K \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Sia $\lambda := \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n$ è ben definito

e $\lambda \leq K$ (quindi λ non è $+\infty$)

λ , come sappiamo, è certamente il l.u.s. (vedi pag 9, lemma 5, con λ al posto di μ

e $E = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$) da:

1) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N}: \lambda - \varepsilon < a_n$

2) $\forall n \in \mathbb{N} \quad \lambda \geq a_n$

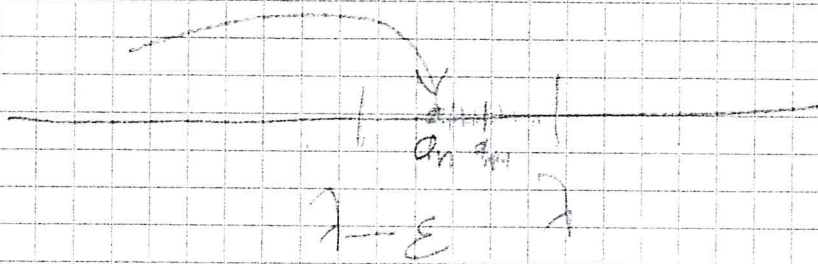
Devo dim. che $\lambda = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$, cioè

(P.1) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} \in \mathbb{N}: \lambda - \varepsilon \leq a_n < \lambda + \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n > \bar{n}$

Dalla 1) e dal fatto che (a_n) è crescente, segue

$$(10.1) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} : \lambda - \varepsilon < a_m \quad \forall m \geq n$$

(dato che $a_n \leq a_{n+1} \leq a_{n+2} \leq \dots$)



Dalla 2), inoltre, ho, $\forall \varepsilon > 0$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \leq \lambda < \lambda + \varepsilon \quad (10.2)$$

Dalle (10.1) e (10.2) segue la (9.1)

2° caso): $\sup_{n \in \mathbb{N}} a_n = +\infty$ deve dimostrare che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$$

Dato che $\sup_{n \in \mathbb{N}} a_n = +\infty$, si ha

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists n \in \mathbb{N} : a_n > M$$

Dalla monotonia, poiché $a_{n+1} \geq a_n$,
 $\therefore \geq a_{n+2}$
 si ha

$$\forall \pi \in \mathbb{R} \quad \exists n \in \mathbb{N} : a_m > \pi \quad \forall m > n$$

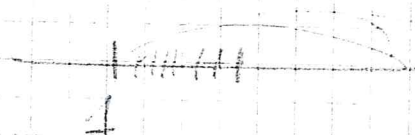
$m \in \mathbb{N}$.

□

Teo Sia $e_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n \geq 1$

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$



Allora $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} e_n = e$

In altre parole,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \text{ può essere adottato}$$

come definizione del numero e ,

vale poi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$$

12

Dimostrando che l'altezza di (e_n) è crescente, da cui, grazie al teo.

fondamentale delle succ. monotone di pg 8, si deduce

$$\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Dim (teo) Applicando es. pg 4 lex. 2 con $a=1, b=\frac{1}{n}$,

$$\text{Si ha } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot 1^{n-k} \frac{1}{n^k}$$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = (*)$$

Di fatto si vuole studiare

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \right)$$

$$(*) = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k! (n-k)!} \frac{1}{n^k} =$$

$$= \sum_{k=0}^n \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)}{k!} \frac{1}{n^k}$$

« Si sottrae la somma parziale n-esima

$$\downarrow \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \Rightarrow$$

$$= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \frac{\overbrace{n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)}^{\text{Sono } k}}{n^k}$$

$$= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \left(\frac{n}{n} \frac{(n-1)}{n} \frac{(n-2)}{n} \dots \frac{(n-k+1)}{n} \right)$$

$$= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \left(1 - \frac{2}{n} \right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n} \right) = (\#)$$

Poniamo $P_{k,n} = \left(1 - \frac{1}{n} \right) \left(1 - \frac{2}{n} \right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n} \right)$

$$(\#)_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} P_{k,n}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad \forall k \in \{0, \dots, n\} \quad P_{k,n} < 1$$

$$\Rightarrow (\#) < \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \quad \text{Somma parziale n-esima della}$$

Serie $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$

Ass

16

$$e_n < \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$$

$$\Rightarrow \sup_{n \in \mathbb{N}} e_n \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e < \frac{64}{27}$$

Dunque la successione (e_n) è

superiormente limitata, e anzi

$$1 < e_n < e \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (16.1)$$

Questo non dimostra che (e_n) ammette limite; a posteriori, avremo

$$\begin{array}{c} | \quad | \quad | \\ e_n \quad S_n \quad e \\ \hline \end{array}$$

Però, se (e_n) ammette limite, tale limite sarà $\leq e$. Per ora, però, dalla (16.1), possiamo dire

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} e_n \leq e$$

17

Vediamo che (e_n) è (strettamente) crescente.

$$e_n < e_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$



$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} P_{k,n} < \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} P_{k,n+1} \quad (17.1)$$

dove ricordo che

$$P_{k,n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$$

$$P_{k,n+1} = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right)$$

Si vede subito che $P_{k,n} < P_{k,n+1}$

da cui segue la (17.1) (altrettanto, il membro destro della (17.1) ha un addendo in +).

Quindi $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} e_n \leq e$

Resta da dimostrare $\lim_{n \rightarrow +\infty} e_n \geq e$