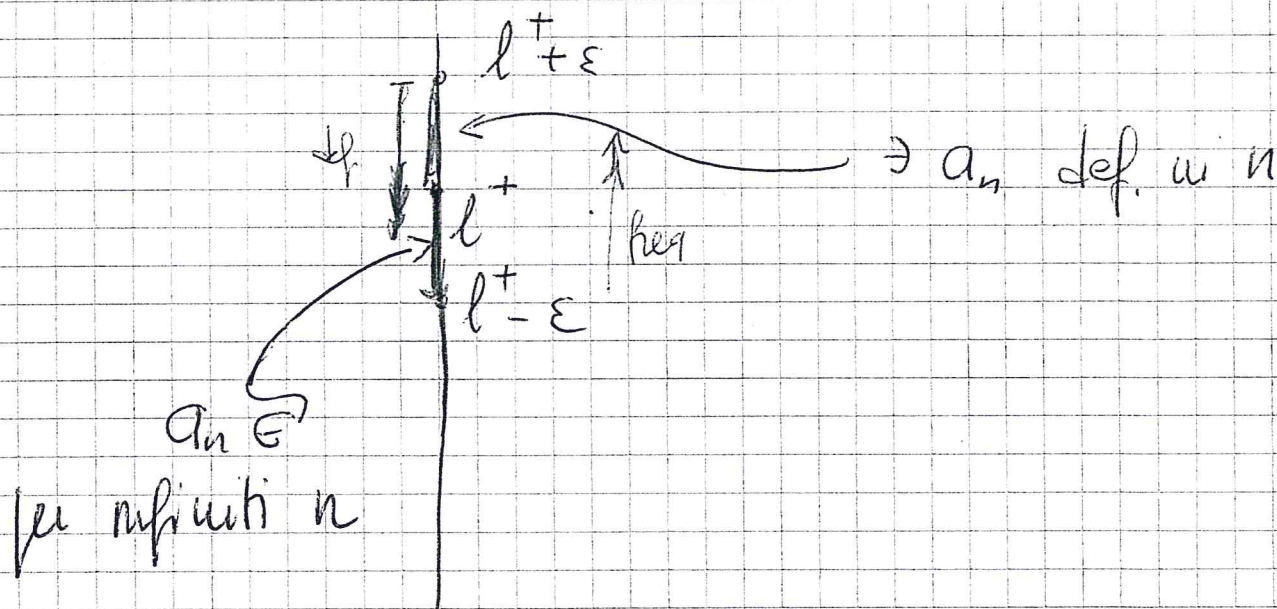


Lezione 9 10/10/19

9-11

Dobbiamo dimostrare la caratterizzazione
del $\limsup a_n$ e del $\liminf a_n$
(teo. 8.14.1)

Chiamiamo $l^+ = \limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n$
e supponiamo $l^+ \in \mathbb{R}$.



$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} : \forall m \in \mathbb{N}, m > n \quad a_m < l^+ + \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists m \in \mathbb{N}, m > n \quad a_m > l^+ - \varepsilon$$

da questo segue in particolare

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists m \in \mathbb{N}, m > n \quad |a_m - l^+| < \varepsilon$$

$$l^+ = \inf_{n \in \mathbb{N}} \left(\sup_{k > n} a_k \right)$$

$$= \inf_{n \in \mathbb{N}} C_n$$

Dalle proprietà dell'inf (vedi lemma 5.7.1)

$$1) \quad l^+ \leq C_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$2) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} : C_n < l^+ + \varepsilon$$

La 2) dice:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} : \sup_{k > n} a_k < l^+ + \varepsilon$$

Ma dalle proprietà del sup (vedi lemma 5.7.1)

$$\text{ho} \quad \sup_{k > n} a_k \geq a_k \quad \forall k > n$$

$\Rightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \forall k > n \quad a_k < l^+ + \varepsilon$$

$$\text{cioè} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad a_n < l^+ + \varepsilon \quad \text{def. } n$$

Del lemma 5.7.1 ho usato la 2) dell'inf e la 1) del sup

La 1) dice

$$l^+ \leq \sup_{k > n} a_k = c_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Dalle proprietà del sup (Lemma 5.7.1)

so che $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} : a_k > c_n - \varepsilon$$

poss concatenare

$$a_k + \varepsilon > c_n$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} : l^+ < a_k + \varepsilon$$

cioè

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} : l^+ - \varepsilon < a_k$$

cioè

$$\forall \varepsilon > 0 \quad a_k > l^+ - \varepsilon \quad \text{per q. n}$$

Def 9.3.1 Sia (a_n) successione di numeri complessi. Sia $\underline{l \in \mathbb{C}}$. Si dice (a_n) converge a l , e si scrive

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l \quad \text{se}$$

oppure $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad |a_n - l| < \varepsilon \quad \text{def. } n$$

Cioè

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} : \forall m \in \mathbb{N} \quad m > n$$

(9.4.1)

$$|a_m - l| < \varepsilon$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \ll a_n \in B_\varepsilon(l) \\ \text{def. } n \gg \end{array}}$$

Cioè nel coro reale

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} : \forall m \in \mathbb{N} \quad m > n$$

$$l - \varepsilon < a_m < l + \varepsilon$$

qui $|z|$ indica modulo di z

se $z \in \mathbb{R}$ $|z|$ è valore assoluto di z .

Def 9.6.1 Sia (a_n) succ. di numeri reali.

Si dice che (a_n) tende a $+\infty$ e si scrive

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty \quad \text{oppure}$$

$$a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

$$\text{se } \forall T \in \mathbb{R} \quad \exists n \in \mathbb{N} : \forall m \in \mathbb{N} \quad m > n \\ a_m > T \quad (\text{cioè } a_m \in (T, +\infty))$$

Nota 9.5.1

Se (a_n) é suce. de

numeros complexos, não há seus

senos $a_n \rightarrow +\infty$, mas há

seus senos $|a_n| \rightarrow +\infty$

Exercício 9.5.1

Demonstre que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n} + 3} = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n} + 3} \in (0, +\infty)$$

Devo dem. que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad |a_n - 0| < \varepsilon \quad \text{def. n}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad |a_n| < \varepsilon \quad \text{def. n}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad a_n < \varepsilon \quad \text{def. n}$$

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \quad \frac{1}{\sqrt{n} + 3} < \varepsilon \quad \text{def. n}}$$

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} : \forall m \in \mathbb{N} \quad m > n \quad \frac{1}{\sqrt{m} + 3} < \varepsilon}$$

$$\frac{1}{\sqrt{m} + 3} < \varepsilon$$

↕

$$1 < \varepsilon (\sqrt{m} + 3)$$

↕

$$\frac{1}{\varepsilon} < \sqrt{m} + 3$$

↕

$$\frac{1}{\varepsilon} - 3 < \sqrt{m}$$

$$m > \left(\frac{1}{\varepsilon} - 3 \right)^2$$

basta prendere un qualunque naturale

$> \left(\frac{1}{\varepsilon} - 3 \right)^2$, ad esempio

$$n = \left\lfloor \left(\frac{1}{\varepsilon} - 3 \right)^2 \right\rfloor + 1 = n(\varepsilon)$$

Se fissi un n , tutte le volte che $m > n$

ho $\frac{1}{\sqrt{m} + 3} < \varepsilon$, che è quello

che volevo.

Nota che al diminuire di $\varepsilon > 0$
 un aspetto che $n(\varepsilon)$ aumenta.
 In effetti in questo esercizio

$$n(\varepsilon) = \left\lfloor \left(\frac{1}{\varepsilon} - 3 \right)^2 \right\rfloor + 1$$

aumenta al diminuire di $\varepsilon > 0$

ES 9.7.1

Dimostrare che

$$\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}} =$$

$$= \sqrt{n+1} (\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}) \rightarrow +\infty$$

$$\forall T > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} : \forall m \in \mathbb{N} \quad m > n$$

$$\sqrt{m+1} (\sqrt{m+2} + \sqrt{m+1}) > T$$

Si ha

$$\sqrt{m+1} (\sqrt{m+2} + \sqrt{m+1}) > 2\sqrt{m+1}$$

basta

$$m > \frac{T^2}{4} - 1$$

basta

$$n = \left\lfloor \frac{T^2}{4} - 1 \right\rfloor + 1$$

ES CASI

8

Dimostrare che se (a_n) è una succ. reale, allora

$$l^+ = l^-$$



$$\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \quad (= l^+ = l^-)$$

ES CASI Sia (a_n) una succ. reale,

Dimostrare che $\exists (n_k)$ sottosucc. di

indici tale che

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} = l^+$$

e che $\exists (n_h)$ sottosucc. di indici

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} a_{n_h} = l^-$$

Teo 9.9.1 (fondamentale sulle successioni Monotone)

Sia (a_n) suc. reale crescente. Allora (a_n) ammette limite uguale al suo estremo superiore, cioè

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \sup \{ a_n : n \in \mathbb{N} \}.$$

Analogamente, se (a_n) è decrescente, allora ammette limite uguale al suo estremo inferiore, cioè

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \inf \{ a_n : n \in \mathbb{N} \}.$$

« Le successioni monotone crescenti
sono costrette (non potendo oscillare)
o a convergere a $+\infty$ o a convergere
a un numero finito ».

oss 9.9.1 Se Teo 9.9.1 vale, Allora, nelle espressioni
del $\liminf a_n$ e $\limsup a_n$, per
una generica successione (a_n) posso scrivere:

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{k > n} a_k$$

$$= \inf_{n \in \mathbb{N}} c_n$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n$$

(c_n) decreasing + teo 9.9.1

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{k > n} a_k$$

Nello stesso modo

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \inf_{k > n} a_k$$

Dim (teo 9.9.1) Supponiamo $a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Distinguiamo 2 casi:

$$1) \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n < +\infty$$

$$2) \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n = +\infty$$

11

• CAS 1): poniamo $S := \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n \in \mathbb{R}$

Allora

$$(i) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad S \geq a_n$$

$$(ii) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} : a_n > S - \varepsilon$$

• Poiché (a_n) è crescente, dalla (ii) segue

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} : \forall m \in \mathbb{N} \quad m \geq n$$

$$\text{cioè} \quad a_m > S - \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad a_n > S - \varepsilon \quad \text{def. } n \quad (9.11.1)$$

• Inoltre (i) implica

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \varepsilon + S > a_n$$

$$\text{cioè} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad a_n < S + \varepsilon \quad \text{sempre}$$

$$\text{e in particolare def. } n. \quad (9.11.2)$$

• educe, dalla (9.11.1) e dalla (9.11.2)

$$\forall \varepsilon > 0 \quad |a_n - S| < \varepsilon \quad \text{def. } n.$$

• Dunque S verifica la (9.6.1).

Dedotto $S = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$, perdo

vale

teo 9.12.1: Il limite di (a_n) , se esiste, è unico.

Dim supponiamo $l_1 \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$

$$l_2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$$

e $l_1 < l_2$. Prendiamo $\varepsilon \in (0, \frac{l_2 - l_1}{2})$

Allora $\exists n_1 \in \mathbb{N} : \forall m \in \mathbb{N} \quad m > n_1$

$$|a_m - l_1| < \varepsilon$$

$\exists n_2 \in \mathbb{N} : \forall m \in \mathbb{N} \quad m > n_2$

$$|a_m - l_2| < \varepsilon$$

$\Rightarrow \bar{n} := \max(n_1, n_2)$ si ha

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad m > \bar{n} \quad |a_m - l_1| < \varepsilon \quad e$$

$$|a_m - l_2| < \varepsilon$$

assunto perdo $l_1 + \varepsilon < l_2 - \varepsilon$. $\square$

Il caso 2) per caso R