

Lezione 8

9/10/19

9-13

Sia $n \in \mathbb{N}$;

Vogliamo dimostrare che la coda della serie

$$e - e_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} < \frac{1}{(n+1)!} \frac{n+2}{n+1} \quad (8.1.1)$$

questo equivale a

$$(n+1)! \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} < \frac{n+2}{n+1} \quad (8.1.2)$$

II

$$(n+1)! \left(\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \dots \right) = \quad (8.1.3)$$

$$= 1 + \frac{(n+1)!}{(n+2)!} + \frac{(n+1)!}{(n+3)!} + \dots$$

$$= 1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+3)(n+2)} + \frac{1}{(n+4)(n+3)(n+2)} + \dots$$

Dato che $\frac{1}{n+3} < \frac{1}{n+2}$, $\frac{1}{n+4} < \frac{1}{n+2}$ e così via

Si ottiene

$$(n+1)! \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} < 1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+2)(n+2)} + \dots$$

$$= 1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \frac{1}{(n+2)^3} + \dots$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+2} \right)^k \quad \text{serie geometrica di ragione } \frac{1}{n+2} < 1$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{1}{n+2}} - 1 = \frac{n+2}{n+2-1} - 1 = \frac{n+2}{n+1} \Rightarrow (8.1.2) \quad \square$$

ES 8.2.1

$$e \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

2

Supponiamo per assurdo $e \in \mathbb{Q}$

$$\text{allora } \exists p, q \in \mathbb{N}, : e = \frac{p}{q}$$

possiamo usare l'lemma (7.10.1) con la scelta $n = q$

$$e - e_q < \frac{1}{(q+1)!} \frac{q+2}{q+1} \quad (8.2.1)$$

$$e = \sum_{k=0}^q \frac{1}{k!}$$

$$\text{Dico che } \frac{1}{(q+1)!} \frac{q+2}{q+1} < \frac{1}{q!} \frac{1}{q} \quad (8.2.2)$$



$$\frac{q+2}{(q+1)^2} < \frac{1}{q} \Leftrightarrow q(q+2) < (q+1)^2$$

$\parallel$ $\parallel$
 $q^2 + 2q$ $q^2 + 2q + 1$

Ne segue da (8.2.1) e (8.2.2)

$$e - \sum_{k=0}^q \frac{1}{k!} < \frac{1}{q!} \frac{1}{q} \quad (8.2.3)$$



$$q! \left(e - \sum_{k=0}^q \frac{1}{k!} \right) < \frac{1}{q}$$

Ora ostendo che

$$q!e \in \mathbb{N}, \text{ dato che}$$

$$q!e = q! \cdot \frac{p}{q} = (q-1)!p \in \mathbb{N}$$

Inoltre noto che

$$q! \sum_{k=0}^q \frac{1}{k!} \in \mathbb{N}, \text{ dato che}$$

II

$$q! \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{q!} \right) = q! + \frac{q!}{2} + \dots + 1 \in \mathbb{N}$$

Ne segue

$$q! \left(e - \sum_{k=0}^q \frac{1}{k!} \right) \in \mathbb{N}, \text{ ma anche}$$

$$q! \left(e - \sum_{k=0}^q \frac{1}{k!} \right) < \frac{1}{q}, \text{ assurdo.}$$

□

Ricapitolando:

$$e = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$$

$$2,5 < e < 3 - \frac{1}{12}$$

$$e \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

Es 8.6.1 Ricordiamo come abbiamo
dimostrato che $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$

$$\begin{aligned}
 & 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}} + \dots \\
 & \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \dots \\
 & = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots = +\infty
 \end{aligned}$$

Abbiamo usato due idee:

- 1) Smettere la somma in blocchetti di 2^k addendi
- 2) $a_n = \frac{1}{n}$ è decrescente

Testo dell'enunciato i: Sia (a_n) una

Successione di numeri positivi, e supponiamo

che sia (a_n) decrescente. Allora

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty \iff \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n a_n}{2^n} < +\infty \quad (8.6.1)$$

(CRITERIO DI CONDENSATIONE DI CAUCHY)

Possiamo utilizzare questo criterio per dimostrare

la (7.7.1), cioè

$$\forall \alpha > 1 \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} < +\infty$$

8 (8.4.1) e' vera

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} < +\infty \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} 2^n \frac{1}{(2^n)^\alpha}$$

a_n a_{2^n}

$$\frac{2^n}{(2^n)^\alpha} = \frac{2^n}{2^{n\alpha}} = \frac{1}{2^{n\alpha-n}} = \frac{1}{2^{n(\alpha-1)}}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{(2^n)^\alpha} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}} \right)^n$$

serie geom. di ragione $\frac{1}{2^{\alpha-1}} < 1$

perché $\alpha-1 > 0$
cioè $\alpha > 1$

Limite Contro.

Suggerimento per esercizio 8.4.1: un'idea
le idee 1) e 2):

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = a_1 + a_2 + \underbrace{a_3 + a_4}_{S_2} + \underbrace{a_5 + a_6 + a_7 + a_8}_{S_3} + \dots$$

$$S_n = \sum_{i=1}^n a_i; \quad S_8 = a_1 + a_2 + \dots + a_8 = S_{2^3}$$

$$S_{2^{n+1}} = a_1 + a_2 + \dots + a_{2^{n+1}}$$

$$= a_1 + a_2 + \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=2^j+1}^{2^{j+1}} a_k \right)$$

blocchetto

$n=3?$

$$a_1 + a_2 + \sum_{j=1}^3 \left(\sum_{k=2^j+1}^{2^{j+1}} a_k \right)$$

$$= a_1 + a_2 + \left(\sum_{k=3}^4 a_k \right) + \left(\sum_{k=5}^8 a_k \right) + \left(\sum_{k=9}^{16} a_k \right)$$

$$= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{16}$$

$\uparrow$ 1° blocchetto $\uparrow$ 2° blocchetto $\uparrow$ 3° blocchetto ($n=4$)

L'idea 1) mi fornisce l'equazione:

$$S_{2^{n+1}} = a_1 + a_2 + \sum_{j=1}^n \sum_{k=2^j+1}^{2^{j+1}} a_k$$

Adesso uso l'idea 2), cioè che

$$a_{h+1} \leq a_h \quad \forall h \in \mathbb{N}$$

$$a_1 + a_2 + \sum_{j=1}^n \sum_{k=2^{j+1}}^{2^{j+1}-1} a_k \leq S_{2^{n+1}} \leq a_1 + a_2 + \sum_{j=1}^n \sum_{k=2^{j+1}}^{2^{j+1}-1} a_k$$

$$a_1 + a_2 + \sum_{j=1}^n a_{2^{j+1}} \leq S_{2^{n+1}} \leq a_1 + a_2 + \sum_{j=1}^n a_{2^{j+1}}$$

numero degli addendi $2^{j+1} - (2^{j+1} - 1)$

$$= 2^{j+1} - 2^j =$$

$$= 2^j (2 - 1) = 2^j$$

$$a_1 + a_2 + \sum_{j=1}^n \frac{2^j}{2^{j+1}} a_{2^{j+1}} \leq S_{2^{n+1}} \leq a_1 + a_2 + \sum_{j=1}^n \frac{2^j}{2^{j+1}} a_{2^{j+1}}$$

Questo conclude.

Per potere studiare la legge delle serie a termini non nec. positivi, dobbiamo introdurre la nozione di limite. Fino a adesso per studiare serie a termini positivi, abbiamo avuto bisogno solo della nozione di estremo superiore.)

8

MASSIMO E MINIMO LIMITE DI UNA SUCCESSIONE DI NUMERI REALI

Def 8.8.1 Sia (a_n) una successione di numeri reali. Si definisce massimo limite di (a_n) , e si indica con

$$\max \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n, \text{ oppure } \limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n,$$

la quantità:

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{k > n} a_k \quad (8.8.1)$$

Si definisce minimo limite di (a_n) , e si indica con

$$\min \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n, \text{ oppure } \liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n,$$

la quantità:

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{k > n} a_k \quad (8.8.2)$$

oss 8.8.1 $\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n$ e $\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n$ esistono

sempre; mentre vedremo che il limite di (a_n) non sempre esiste ad esempio quando (a_n) oscilla e le oscillazioni non si smorzano.

Potremmo

$\forall n \in \mathbb{N}$

$$c_n = \sup_{k > n} a_k$$

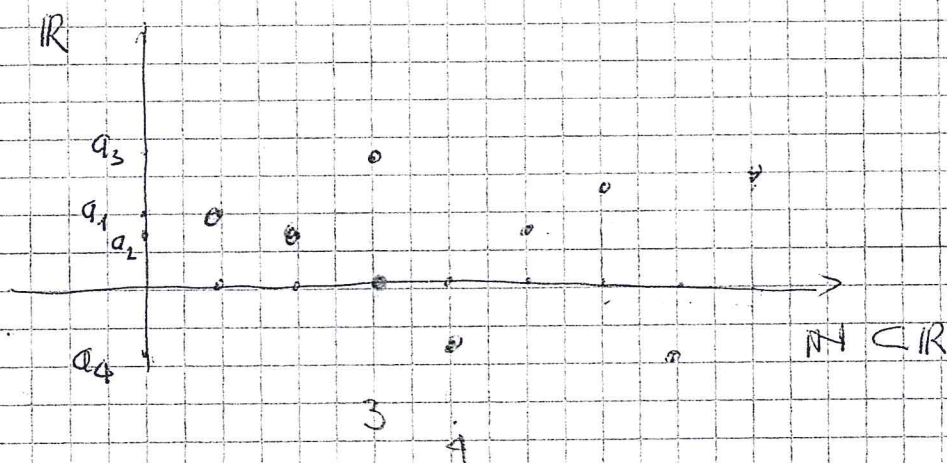
$$b_n = \inf_{k > n} a_k$$

Potremmo considerare (c_n) , e (b_n)

Dico che

$$c_{n+1} \leq c_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$b_{n+1} \geq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$



$$\{k \in \mathbb{N} : k > n\} \supseteq \{k \in \mathbb{N} : k > n+1\}$$

$\Downarrow$

$$\{a_k : k > n\} \supseteq \{a_k : k > n+1\}$$

$$\Rightarrow \sup \{a_k : k > n\} \geq \sup \{a_k : k > n+1\} = c_{n+1}$$

$$b_n = \inf \{a_k : k > n\} \leq \inf \{a_k : k > n+1\} = b_{n+1}$$

Donque (b_n) é monotonica crescente

(c_n) é monotonica decrescente.

Exemplo 8.10.1

$$a_n = (-1)^n$$

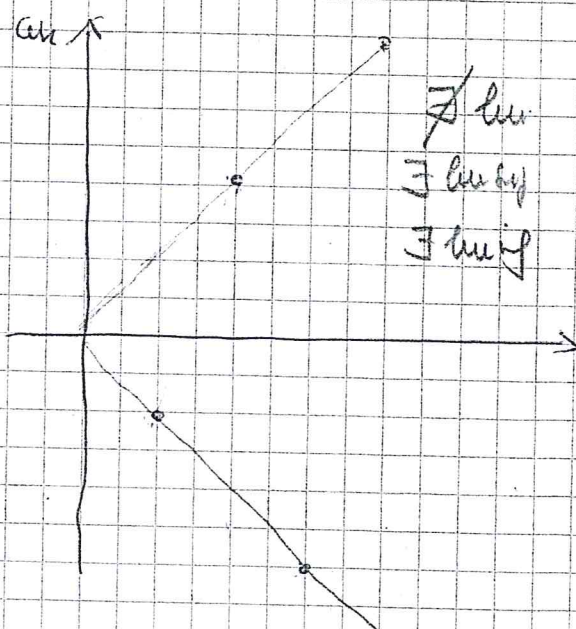
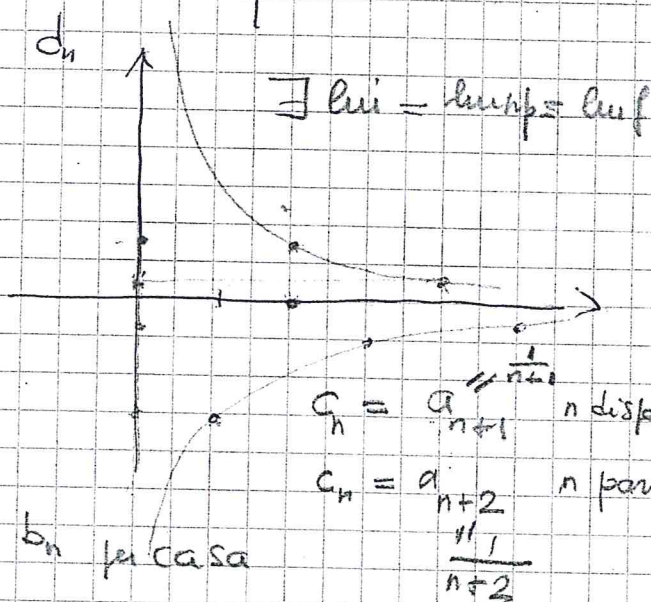
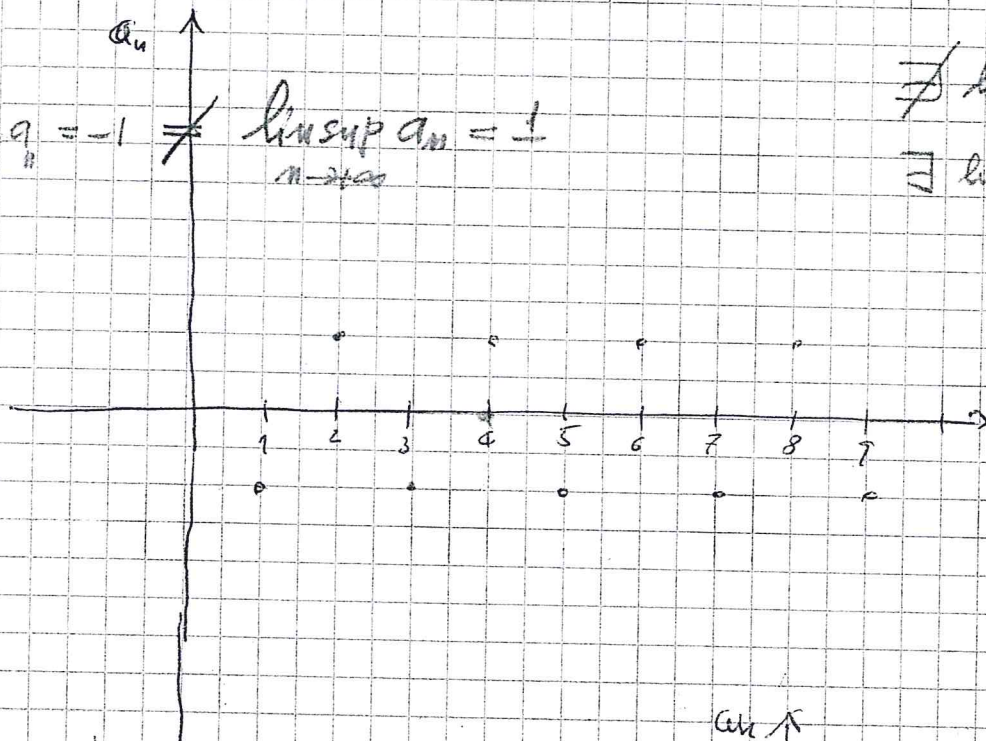
$$\begin{aligned} c_n &= 1 \quad \forall n \\ \inf c_n &= 1 \\ b_n &= -1 \quad \forall n \\ \sup b_n &= -1 \end{aligned}$$

$$d_n = \frac{(-1)^n}{n}$$

$$ca_n = (-1)^n n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -1 \neq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$$

$\nexists \lim$
 $\exists \limsup, \exists \liminf$



$$a_n = (-1)^n$$

$$c_n = \sup \{ a_k : k > n \} = \sup \{ (-1)^k : k > n \} \\ = 1 = \max \{ (-1)^k : k > n \}$$

$$b_n = \inf \{ a_k : k > n \} = \inf \{ (-1)^k : k > n \} \\ = -1 = \min \{ (-1)^k : k > n \}$$

la successione (c_n) è costante $= 1$

la successione (b_n) è costante $= -1$

$$\sup \{ c_n : n \in \mathbb{N} \} = \sup 1 = 1 =: l^+$$

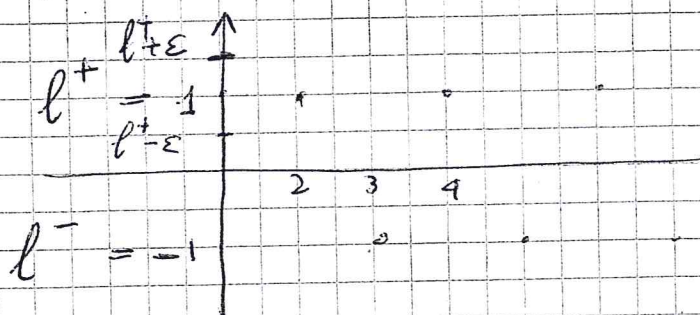
$$\sup \{ b_n : n \in \mathbb{N} \} = \sup(-1) = -1 =: l^-$$

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = -1 < \limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1$$

Qui $\liminf a_n \neq \limsup a_n$ sono diversi:

« ^{l'ampiezza} $\limsup$ $\liminf$ oscillazione è costante (=2) e

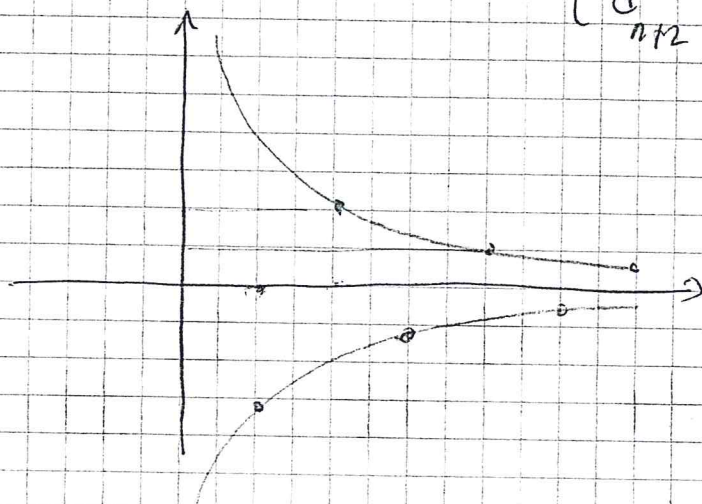
non è finita $\Rightarrow$



$$d_n = \frac{(-1)^n}{n}$$

$\leftarrow$

$$c_n = \sup \{ d_k : k > n \} = \begin{cases} d_{n+1} & n \text{ dispar} \\ d_{n+2} & n \text{ pari} \end{cases}$$



$$c_n = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & n \text{ dispar} \\ \frac{1}{n+2} & n \text{ pari} \end{cases}$$

$$\inf \{ c_n : n \in \mathbb{N} \} = 0 \quad \text{non è un minimo}$$

$$b_n = \inf \{ d_k : k > n \} = -\frac{1}{n+2} \quad n \text{ dispar}$$

$$b_n = -\frac{1}{n+1} \quad \text{se } n \text{ è pari}$$

$$\sup \{ b_n : n \in \mathbb{N} \} = 0 \quad \text{non è un massimo}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \inf d_n = 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup d_n$$

$$\omega_n = (-1)^n n \quad \text{per cosa}$$

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \omega_n = -\infty$$

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \omega_n = +\infty$$

Proprietà 1 Si ha sempre

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n$$

Dimostrazione. Sia $n \in \mathbb{N}$; allora

$$\inf \{a_k : k > n\} \leq \sup \{a_k : k > n\}$$

Così $\forall n \in \mathbb{N}$

$$b_n \leq c_n$$

$\Downarrow$

$$\liminf_n a_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} b_n \leq \inf_{n \in \mathbb{N}} c_n = \limsup_n a_n$$

Teo 8.14.1 Sia (a_n) una succ.
di numeri reali, poniamo

$$l^- := \liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n$$

$$l^+ := \limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n$$

e supponiamo $l^- > -\infty$

$$l^+ < +\infty$$

(cioè $l^-, l^+ \in \mathbb{R}$)

Allora: $\forall \varepsilon > 0$

$$\begin{cases} a_n < l^+ + \varepsilon & \text{def. } n \\ a_n > l^- - \varepsilon & \text{freq. } n \end{cases}$$

$$a_n < l^- + \varepsilon \quad \text{freq. } n$$

$$a_n > l^+ - \varepsilon \quad \text{def. } n$$

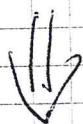
In particolare

$$\forall \varepsilon > 0 \quad l^+ - \varepsilon < a_n < l^+ + \varepsilon \quad \text{per } n$$

$$l^- - \varepsilon < a_n < l^- + \varepsilon \quad \text{per } n$$

Come vedremo se capiterà

$$\forall \varepsilon > 0 \quad l^+ - \varepsilon < a_n < l^+ + \varepsilon \quad \text{def. 1}$$



$$l^+ = l^- = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$$

o/ve se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad l^- - \varepsilon < a_n < l^- + \varepsilon \quad \text{def. 1}$$



$$l^+ = l^- = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$$