

ES 7.1.1.

Sia (a_n) una successione di numeri positivi, supponiamo

$$S := \sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty.$$

Allora sappiamo che, detta $S_n = \sum_{j=1}^n a_j$, si ha:

(perché $S := \sup\{S_n : n \in \mathbb{N}\}$):

$$1) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad S_n \leq S$$

$$2) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} : S_n > S - \varepsilon$$

Dimostrare che la 2) si rafforza nella:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} : S_m > S - \varepsilon \quad (7.1.1)$$

$\swarrow \searrow$
 $\forall m \in \mathbb{N}, m \geq n$

Suggerimento: basta ricordare che

$$S_j \leq S_{j+1} \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

In parole, la (7.1.1) dice che

$\forall \varepsilon > 0 \quad S_n > S - \varepsilon$ definitivamente in n .

Teo 7.2.1 (Conseguenza del Teorema
del confronto; criterio del rapporto)

Sia (a_n) una successione di numeri
 > 0 . Allora

(i) Se $\exists q \in (0, 1)$ tale che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q \quad \text{dalla } n$$

(cioè $\exists \bar{n} \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq \bar{n}$)

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$$

Allora
$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty$$

(ii) Se $\exists q \in (1, +\infty)$ tale che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq q \quad \text{dalla } n$$

allora
$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty$$

oss 7.2.1 $q = 1$ non rientra nell'enunciato.

Esempio 7.3.1

$$a_j = \frac{1}{j}$$

$$\frac{a_{j+1}}{a_j} = \frac{j}{j+1} < 1 \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

$$\forall q \in (0, 1): \quad \frac{a_{j+1}}{a_j} \leq q \quad \text{def. } j.$$

Donque non può applicarsi (i). Tra l'altro

$\sum \frac{1}{j} = +\infty$, mentre (i) assicurerebbe che converge.

Suggerimento: Teo 7.2.1 si applica spesso quando compariamo dei fattoriali

Sebbene già ad esempio

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!} < +\infty \quad (j! \approx 2^{j-1})$$

Ridimostriamo

$$a_j = \frac{1}{j!}$$

$$\frac{a_{j+1}}{a_j} = \frac{\frac{1}{(j+1)!}}{\frac{1}{j!}} = \frac{j!}{(j+1)!} = \frac{1}{j+1}$$

$$\leq \frac{1}{2} =: q \quad \forall j \geq 1, \quad \text{e } q < 1.$$

Def (teo 7.2.1).

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q \quad \forall n \geq \bar{n}$$

$$a_{n+1} \leq q a_n \quad \forall n \geq \bar{n}$$

(dato che $a_n > 0$)

$$a_{\bar{n}+1} \leq q a_{\bar{n}}, \quad a_{\bar{n}+2} \leq q a_{\bar{n}+1} \leq q^2 a_{\bar{n}}$$

$$a_{\bar{n}+3} \leq q^3 a_{\bar{n}}, \dots$$

Deduco che

$$a_{\bar{n}+k} \leq q^k a_{\bar{n}} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Dal confronto

$$\sum_{k=\bar{n}}^{+\infty} a_n \leq a_{\bar{n}} \sum_{k=\bar{n}}^{+\infty} q^k$$

$$a_{\bar{n}} + a_{\bar{n}+1} + a_{\bar{n}+2} \dots$$

$$a_{\bar{n}} (q^0 + q^1 + q^2 + \dots)$$

$$\text{Ma } \sum_{k=\bar{n}}^{+\infty} q^k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} q^k < +\infty$$

$$\text{per } 0 < q < 1$$

esercizio 5.17.1

(con $x = q$)

"La serie originale, da un certo indice in poi, sta sotto una serie convergente, dunque converge"

1. (ii) Dimostrare analogo:

$$\exists \bar{n} \in \mathbb{N} : \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq q > 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq \bar{n}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq q \Rightarrow a_{n+1} \geq q a_n \quad \forall n \geq \bar{n}$$

$$a_{\bar{n}+1} \geq q a_{\bar{n}}, \quad a_{\bar{n}+2} \geq q a_{\bar{n}+1} \geq q^2 a_{\bar{n}} \dots$$

$$a_{\bar{n}+k} \geq q^k a_{\bar{n}} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \text{Del contenuto}$$

$$\sum_{k=\bar{n}}^{+\infty} a_k \geq a_{\bar{n}} \sum_{k=\bar{n}}^{+\infty} q^k = +\infty \quad (\text{serie geom. di ragione } > 1)$$

di ragione > 1) $\square$

ES 7.5.1

Studiare il carattere della serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n, \quad \text{dove} \quad a_n = \begin{cases} \frac{1}{2^n}, & n \text{ pari} \\ \frac{3}{2^n}, & n \text{ dispari} \end{cases}$$

Si può applicare tes 7.3.1?

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} \frac{\frac{3}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2^n}} = \frac{3}{2} & n \text{ pari} \\ \frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{3}{2^n}} = \frac{1}{6} & n \text{ dispari} \end{cases}$$

non si può applicare
ne' (i) ne' (ii)
del tes 7.3.1

D'altra parte, l'esempio è molto facile
(con il confronto) così:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 < a_n \leq \frac{3}{2^n}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{2^n} = 3 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} < +\infty$$

CONFRONTO

teo 7.6.1 (conseguenza del Teorema del Confronto;
criterio della radice). Sia (a_n) una
successione di numeri ≥ 0 . Allora

(i) se $\exists q \in (0, 1)$ tale che

$$\sqrt[n]{a_n} \leq q \quad \text{def. n}$$

allora $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty$

(ii) se $\exists q \in (1, +\infty)$:

$$\sqrt[n]{a_n} \geq q \quad \text{def. n}$$

allora $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty$

258 7.6.1 $q = 1$ non mette nell'ambito

Fatti utili e interessanti (da vedere):

$$\bullet \forall \alpha > 1 \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} < +\infty \quad (7.1.1)$$

Per caso: dimostrato se $\alpha \geq 2$

La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ può dunque avere utilità come serie di confronto.

$$\bullet \forall \alpha > 1 \quad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha \ln n} < +\infty \quad (7.1.2)$$

$$\bullet \forall \alpha \in [0, 1] \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = +\infty \quad \underline{\text{CASA}}$$

CASA $(7.1.1) \Rightarrow (7.1.2)$.

Dai teo 7.6.1

$$(i) \quad \sqrt[n]{a_n} \leq q \Rightarrow a_n \leq q^n \quad \forall n \geq \bar{n}$$

$$a_{\bar{n}} \leq q^{\bar{n}}, \quad a_{\bar{n}+1} \leq q^{\bar{n}+1}, \quad \dots$$

$$\sum_{k=\bar{n}}^{+\infty} a_k \leq \sum_{k=\bar{n}}^{+\infty} q^k < +\infty$$

$$\left(\leq \sum_{k=\bar{n}}^{+\infty} q^k < +\infty, \quad q < 1 \right)$$

(ii) simili.

□

Teo 7.8.1 (il termine n -esimo di una
serie convergente è infinitesimo)

Sia (a_n) una successione di numeri
non negativi. Allora

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty \implies \ll \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0 \gg$$

cioè $\forall \varepsilon > 0 \quad 0 \leq a_n < \varepsilon \quad \text{def. n}$

(8.1.1) cioè $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n > \bar{n} \implies 0 \leq a_n < \varepsilon$

(La vera def di " $\gg$ " è $\forall \varepsilon > 0 \quad -\varepsilon < a_n < \varepsilon$

def. n, che per in questo caso è ovviamente
vera)

Uso del teo 7.8.1 al contrario : se
un accorgo che la (8.1.1) è falsa

allora $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty$

Esempio 7.8.1

Dimostrare che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\frac{n}{n+10^{100}}}_{a_n} = +\infty$$

CASA

Dal te 7.8.1

Poniamo $S := \sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty$

$$S_n = \sum_{j=1}^n a_j$$

Sappiamo che, per definizione,

$$S = \sup \{ S_n : n \in \mathbb{N} \}, \text{ e dunque}$$

$$1) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad S_n \leq S$$

$$2) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} : S_n > S - \varepsilon$$

Abbiamo osservato nella (7.1.1) che 2) è
rappresentata come segue:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} : \forall m \in \mathbb{N} \quad m \geq n \quad S_m > S - \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} : \forall m \in \mathbb{N} \quad m \geq n \quad S - S_m < \varepsilon$$

$$\text{Ma} \quad S - S_m \geq S_{m+1} - S_m =$$

$$= \sum_{j=1}^{m+1} a_j - \sum_{j=1}^m a_j = a_{m+1}$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} : \forall m \in \mathbb{N} \quad m \geq n$$

$$a_{m+1} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad a_n < \varepsilon \quad \text{d.p. m. n.}$$

□

oss 7.10.1

In generale se vale

$$\forall \varepsilon > 0 \quad 0 \leq a_n < \varepsilon \quad \text{def. } n$$

non è detto che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty.$$

Però abbiamo dimostrato che se

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty$$

allora $\forall \varepsilon > 0 \quad (0 \leq) a_n < \varepsilon \quad \text{def. } n.$

Esempio esempio 7.10.1: Sappiamo che

$$e := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$$

$$e_n := \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} \quad \text{Sappiamo che}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad (0 \leq) e - e_n < \varepsilon \quad \text{def. } n$$

? Qual è l'errore che commetto nel considerare

e_n al posto di e (per n abbastanza grande)?

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad e - e_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} < \frac{1}{(n+1)!} \frac{n+2}{n+1}$$

L'errore esatto $\sqrt[n]{a_n e_n}$ tra e ed e_n lo calcoleremo, ma $\ll$

$$\text{lo da cui } \bar{\epsilon} < \frac{1}{(n+1)!} \frac{n+2}{n+1}$$

Questo $\bar{\epsilon}$ è piccolo, e basterà per
dimostrare

e $\notin \mathbb{Q}$.