

Dim. teo 5.18.1:

1) Supponiamo che  $\sum_{j=1}^{+\infty} b_j < +\infty$

Vuol dire  $\sup \{ S_n^B : n \in \mathbb{N} \} < +\infty$ ,

dove  $S_n^B = \sum_{j=1}^n b_j$

Da  $b_j \geq a_j \geq 0 \quad \forall j \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{j=1}^n b_j \geq \sum_{j=1}^n a_j = S_n^A$

$\parallel$

$S_n^B$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq S_n^A \leq S_n^B$

$\Rightarrow \sup \{ S_n^A : n \in \mathbb{N} \} \leq \sup \{ S_n^B : n \in \mathbb{N} \}$

$\parallel$

$\sum_{j=1}^{+\infty} b_j < +\infty$

$\Rightarrow \sup \{ S_n^A : n \in \mathbb{N} \} < +\infty$

$\subseteq \sum_{j=1}^{+\infty} a_j$

$$2) \quad \text{Sia } \sum_{j=1}^{+\infty} a_j = +\infty$$

$$\Rightarrow \sup \{ S_n^A : n \in \mathbb{N} \} = +\infty$$

$$\text{Ma } S_n^B \geq S_n^A \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \sup \{ S_n^B : n \in \mathbb{N} \} \geq \sup \{ S_n^A : n \in \mathbb{N} \} = +\infty$$

$$\sum_{j=1}^{+\infty} b_j$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{+\infty} b_j = +\infty.$$

□

“Dimostrazione immediata con conseguenza  
profonda”

ES 6.2.1 Studiare il carattere delle serie

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^2}$$

Soluzione: la serie è a termini positivi.

Dunque o converge o diverge.

(Il testo dell'esercizio NON chiede il valore  
nel caso in cui la serie converga)

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots < +\infty \quad ?$$

idea!  $\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^2}$  deve avere lo  
 stesso carattere di  $\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j(j+1)} < +\infty$

$$\frac{1}{j(j+1)} \leq \frac{1}{j^2} \quad \text{VERO}$$

Ma sembrerebbe  $\frac{1}{j^2} \leq \frac{1}{j(j+1)}$  falso

Ma  $\frac{1}{(j+1)^2} \leq \frac{1}{j(j+1)} \quad (6.3.1)$

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{(j+1)^2} = \sum_{j=2}^{+\infty} \frac{1}{j^2}$$

$$= \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^2} - 1$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^2} = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{(j+1)^2} + 1$$

$$\leq \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j(j+1)} + 1$$

(6.3.1) + confronto

$$< +\infty$$

La serie dei reciproci dei quadrati perfetti converge.

# Esercizio 6.6.1 Serie armonica

Studiare il carattere della serie:

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j}$$

$$\frac{1}{j} \geq \frac{1}{j^2} \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

$\Rightarrow$  *Confronto*  $\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j} \geq \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^2}$  *finite*

e non ci dice niente.

$$\begin{array}{ccccccccc} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & & & & \\ 1 & + & \frac{1}{2} & + & \frac{1}{3} & + & \frac{1}{4} & + & \frac{1}{5} & + & \frac{1}{6} & + & \frac{1}{7} & + & \frac{1}{8} & + & \frac{1}{9} & + & \dots \end{array}$$



$$\begin{array}{ccccccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & & & & & \\ 1 & + & \frac{1}{2} & + & \frac{1}{4} & + & \frac{1}{4} & + & \frac{1}{8} & + & \frac{1}{8} & + & \frac{1}{8} & + & \frac{1}{8} & + & \frac{1}{16} & + & \dots \end{array}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

Perché  $\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{2} = +\infty$

Quindi mi aspetto  $\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j} \geq 1 + \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{2} = +\infty$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j} = +\infty$$

$$b_j = \frac{1}{j} \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

$$a_j = \frac{1}{2^{k+1}}, \quad 2^k < j \leq 2^{k+1} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$k=1 \quad j \in \{3, 4\} \quad a_3 = \frac{1}{2^2}, \quad a_4 = \frac{1}{2^2}$$

$$k=2 \quad j \in \{5, 6, 7, 8\} \quad a_5 = \frac{1}{8} = a_6 = a_7 = a_8$$

E' applico il criterio 2)

$$H_n = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}, \quad H_{1000} = 7,4, \quad H_{1000000} = 14,39$$

« La serie armonica diverge molto lentamente »

Domande naturali:

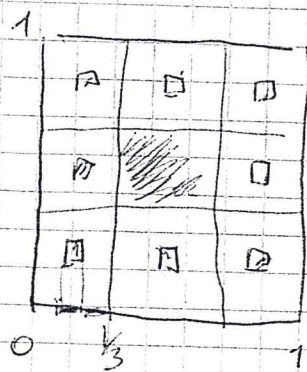
$$\sum_{j \text{ pari} \in \mathbb{N}} \frac{1}{j} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2k}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = +\infty$$

Anche  $\sum_{j \text{ dispari} \in \mathbb{N}} \frac{1}{j} = +\infty$

$$\frac{1}{9} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{8}{9}\right)^j = \frac{1}{9} \left( 1 + \frac{8}{9} + \frac{64}{81} + \dots \right)$$

16



$$\text{area } \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

$$\text{area } \frac{8}{81} = \frac{2^3}{3^4} = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^3$$

$$= \frac{2}{9} \cdot \frac{2^2}{3^2}$$

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{2^{3j}}{3^{2j+2}} = \frac{1}{9} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{2^{3j}}{3^{2j}} = \frac{1}{9} \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\frac{8}{9}\right)^j$$

$$= \frac{1}{9} \frac{1}{1 - 8/9} = \frac{1}{9} \cdot 9 = 1$$

$x = 8/9$  nella serie geometrica

L'area della regione colorata = area del quadrato

iniziale = 1.

« Ma la cosa bella è che resta comunque (dello stesso) una zona bianca, con area = 0, ma

identificabile con altri insiemi »

« Dal punto di vista dell'area non resta niente »

Esercizio 6.7.1 Studiare il carattere di

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \dots \rightarrow \frac{5}{2}$$

e

(6.7.1)  $n^n \geq n! \geq 2^{n-1}$

$\forall n \in \mathbb{N}$

Se lo dimostro

$$\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$

Dimostrare b (6.7.1) in induzione su  $n \in \mathbb{N}$

$$n=1: \quad n^n = 1 \geq 1! = 1 \geq 2^0 = 1 \quad \text{H}$$

Supponiamo  $n^n \geq n! \geq 2^{n-1}$

devo dimostrare  $(n+1)^{n+1} \geq (n+1)! \geq 2^n$

Facciamo la dirg.  $\nearrow$  (l'altro in caso)

$$\text{So } n! \geq 2^{n-1}$$

$$\begin{aligned} (n+1)! &= (n+1) n! \geq (n+1) 2^{n-1} \\ &\geq 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n. \end{aligned}$$

Donque  $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-1}} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2 \end{aligned}$$

$\nearrow$  Serie geom.  $x = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \leq 2$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \leq 1 + 2 = 3$$

In realtà (controlla)  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} < 3$

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \sum_{j=4}^{+\infty} \frac{1}{j!}$$

$$< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \sum_{j=4}^{+\infty} \frac{1}{2^{j-1}}$$

$$= \frac{8}{3} + \sum_{j=4}^{+\infty} \frac{1}{2^{j-1}}$$

$$= \frac{8}{3} + \sum_{j=3}^{+\infty} \frac{1}{2^j}$$

$$= \frac{8}{3} + \sum_{j=3}^{+\infty} \frac{1}{2^j} - \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} \right)$$

$$= \frac{8}{3} - \frac{7}{4} + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{8}{3} - \frac{7}{4} + 2 = \frac{32 - 21 + 24}{12}$$

$$= \frac{35}{12}$$

$$= 3 - \frac{1}{12}$$

$$\frac{5}{2} < e < 3 - \frac{1}{12}$$

Teo 6.9.1 (del confronto definitivo)

Mi serve:

Def. 6.9.1. Sia  $P(n)$  una proprietà che dipende da  $n \in \mathbb{N}$ . Si dice che  $P(n)$  è vera definitivamente in  $n$  se è vera da un certo indice in poi, cioè se

$\exists \bar{n} \in \mathbb{N}$  tale che  $P(n)$  è vera  $\forall n > \bar{n}$

Si dice che  $P(n)$  è vera frequentemente in  $n$  se è vera per infiniti indici, cioè

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists m \in \mathbb{N}, m > n: P(m) \text{ è vera.}$$

ES cosa se  $P(n)$  è vera definitivamente

(in  $n$ ) allora è vera frequentemente (in  $n$ ).

Il viceversa in generale è falso.

Teo 6.10.1 (del confronto definito).

Siano  $(a_n), (b_n)$  due successioni a termini non negativi. Supponiamo

$$a_n \leq b_n \quad \text{definitivamente in } n.$$

Allora

$$1) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} b_n < +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty$$

$$2) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} b_n = +\infty$$

(stesse tesi del teo 5.18.1 ma con ipotesi più deboli).

Dom CASA.