

Lezione 5

2/10/19

1

Mercoledì 17-18

esercitazioni in aula

Giovedì 17-18

ricicliamento Lab. 224 o 237

Ricicliamento martedì 8.15 in aula

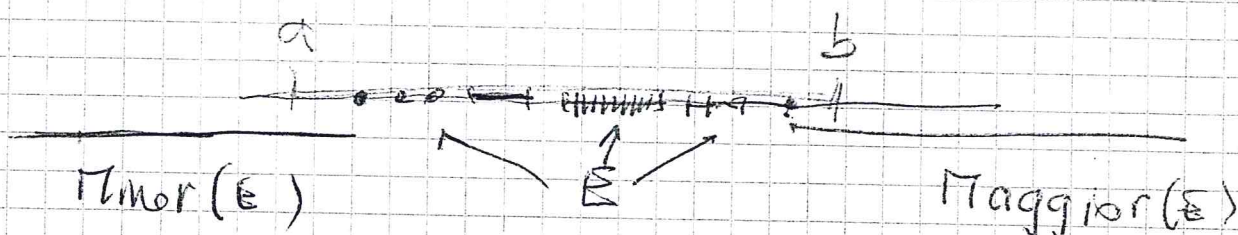
giovedì 8.15 in aula

Def 5.1.1. Sia $E \subseteq \mathbb{R}$, $E \neq \emptyset$.

L'insieme dei maggioranti di $E =$

$$\text{Maggior}(E) = \{x \in \mathbb{R} : \forall e \in E \ x \geq e\}$$

$$\text{Minor}(E) = \{x \in \mathbb{R} : \forall e \in E \ x \leq e\}$$



Nota: può succedere che $\text{Maggior}(E) = \emptyset$
e/o che $\text{Minor}(E) = \emptyset$

Esempio 5.1.1 $E = \mathbb{N} \Rightarrow \text{Maggior}(E) = \emptyset$

$$\text{Minor}(E) = (-\infty, 1]$$

$E = \mathbb{Q} \Rightarrow \text{Maggior}(E) = \emptyset$

$$\text{Minor}(E) = \emptyset$$

Def 5.2.1 $E \subseteq \mathbb{R}$, $E \neq \emptyset$. E si dice
superiormente limitato se $\text{Maggior}(E) \neq \emptyset$.

E si dice inferiormente limitato se
 $\text{Minor}(E) \neq \emptyset$. E si dice limitato, se
 $\text{Maggior}(E) \neq \emptyset$ e $\text{Minor}(E) \neq \emptyset$.

Dimostrare, se E è limitato si ha
che $\exists a, b \in \mathbb{R}$ $a < b$: $E \subset (a, b)$

ES 5.2.1 (cosa) Sia

$$E = \left\{ \frac{1}{n^2} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

trovare $\text{Maggior}(E)$, $\text{Minor}(E)$

$$E = \{ q \in \mathbb{Q} : q \in (2, 3) \}$$

trovare $\text{Maggior}(E)$, $\text{Minor}(E)$

Teo 5.2.1 Sia $E \subseteq \mathbb{R}$, $E \neq \emptyset$.

Supponiamo $\text{Maggior}(E) \neq \emptyset$. Allora

$\exists ! \min(\text{Maggior}(E))$.

Analogamente

3

Es 5.3.1. Sia $E \subseteq \mathbb{R}$, $E \neq \emptyset$, e

$$\text{Minor}(E) \neq \emptyset.$$

Allora $\exists!$ $\max(\text{Minor}(E))$

Dim Cerco di dimostrare l'esistenza
del minimo richiamando l'esistenza
dell'elemento separatore.

$$B := \text{Maggior}(E)$$

$$A := \{x \in \mathbb{R} : \exists e \in E : e \geq x\}$$

$$\mathbb{R} \setminus B = \{x \in \mathbb{R} : \exists e \in E : e > x\}$$

Faccio vedere ora che A e B verificano
le proprietà a pag 8 lemma 4.
E' ovvio che $A \subseteq \mathbb{R}$, $B \subseteq \mathbb{R}$.

$B \neq \emptyset$ per ipotesi. Devo verificare

che $A \neq \emptyset$: si vede $A \supseteq E$ (dato

che ho messo $\geq$ e non $>$), e per ipotesi

Esempio utile: $E = \{0\}$, $B = [0, +\infty)$

$\mathbb{R} \setminus B = (-\infty, 0) \not\supseteq E$

$A = (-\infty, 0] \supset E$

$$E \neq \emptyset$$

Resta da verificare $A \cup B = \mathbb{R}$.

E' chiaro che $A \cup B \subseteq \mathbb{R}$ poichè $A \subseteq \mathbb{R}$, $B \subseteq \mathbb{R}$.

Resta da verificare $A \cup B \supseteq \mathbb{R}$.

Sia $x \in \mathbb{R}$; devo dimostrare che $x \in A \cup B$.

Se $x \in B$ ho finito. Se $x \notin B$

vol dire che $x \in \mathbb{R} \setminus B \subseteq A$, dunque $x \in A$.

Ho verificato tutte le ipotesi della ipotesi

dell'elemento separato $\Rightarrow \exists! c$:

$$\forall a \in A, \forall b \in B \quad a \leq c \leq b \quad (5.4.1)$$

Mi resta da dimostrare che

$$c = \min(\text{Maggior}(E))$$

Devo verificare 2 ipotesi:

$$(i) \quad c \in \text{Maggior}(E)$$

$$(ii) \quad \forall m \in \text{Maggior}(E) \quad c \leq m$$

(i) significa $c \geq e \quad \forall e \in E$. Ma per la dis.

$$\text{nella (5.4.1)} \Rightarrow c \geq a \quad \forall a \in A$$

$$\Rightarrow c \geq e \quad \forall e \in E.$$

(ii) Delle seconda disuguaglianza nella
(5.4.1) ha $\forall b \in B \quad c \leq b$

Ma $B = \text{Maggior}(E)$.

(vedi oss 4.8.1)

Moliamo da questo teorema non è sempre vero in $\mathbb{Q}$ ✓

Questo teorema ci garantisce che

è ben definito quanto segue:

Def 5.1.1. Sia $E \neq \emptyset$

$$\text{Maggior}(E) \neq \emptyset$$

Allora si definisce

$$\text{Sup } E = \text{estremo superiore di } E$$

$$:= \min(\text{Maggior}(E)).$$

Se $\text{Maggior}(E) = \emptyset$ si definisce

$$\text{sup } E := +\infty$$

In questo modo l'estremo superiore di

un insieme non vuoto esiste sempre (mentre il massimo potrebbe non esistere)

Si vuole

Def 5.6.1 Sia $E \neq \emptyset$
 $\inf E \neq \emptyset$.

Si definisce

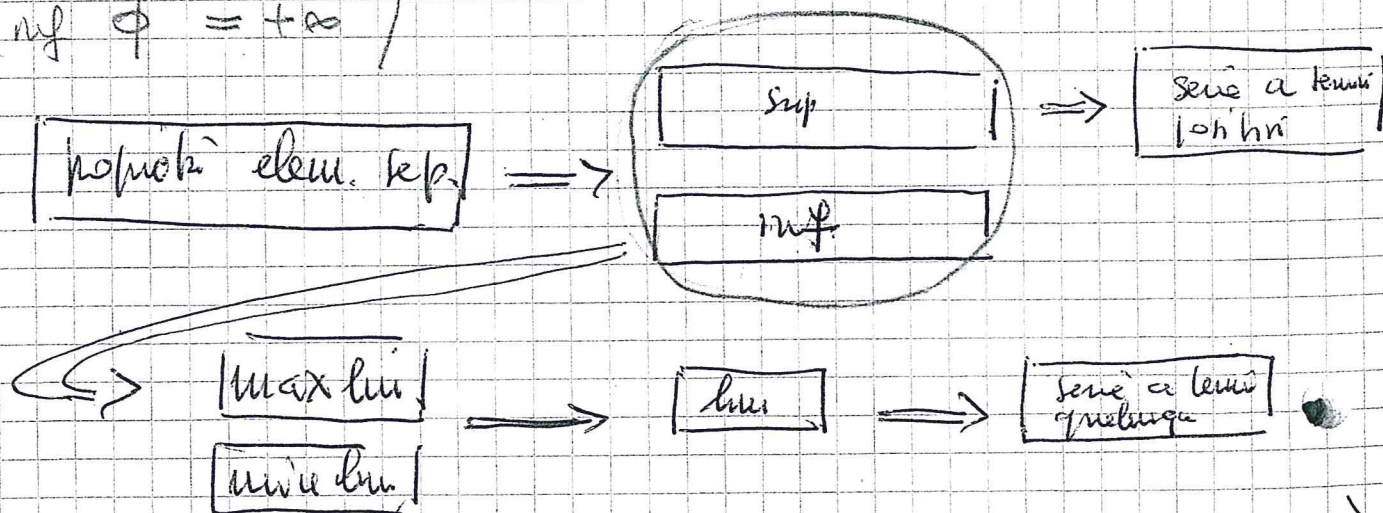
$$\inf E := \text{estremo inferiore di } E \\ = \max(\inf E)$$

Se $\inf E = \emptyset$ si definisce

$$\inf E := -\infty.$$

In questo modo l'estremo inferiore di un insieme non vuoto esiste sempre (anche il minimo potrebbe non esistere).

$$\left(\begin{array}{l} \sup \phi = -\infty \\ \inf \phi = +\infty \end{array} \right)$$



e molto altro. (continuità, derivabilità ecc)

Nota Tutte le volte che faremo $\sup E$, $\inf E$, cercheremo implicitamente $E \neq \emptyset$. 7

Criterio che serve per fare gli estremi:

Lemma (Caratterizzazione di $\sup$ e $\inf$) 5.7.1

Se $\text{Maggior}(E) \neq \emptyset$

$$S = \sup E$$



$$1) \quad \forall e \in E \quad S \geq e \quad (\text{cioè } S \in \text{Maggior}(E))$$

$$S \in \min(\text{Maggior}(E)) \Leftrightarrow \begin{array}{l} \text{+ piccolo di } S \text{ non è magg.} \\ \text{qualsunque numero} \end{array} \checkmark$$

$$2) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists e \in E : e > S - \varepsilon$$

Se $\text{Minor}(E) \neq \emptyset$

$$i = \inf E$$



$$1) \quad \forall e \in E \quad i \leq e$$

$$i \in \max(\text{Minor}(E)) \Leftrightarrow \begin{array}{l} \text{qualsunque numero +} \\ \text{grande di } i \text{ non è min.} \end{array}$$

$$2) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists e \in E : e < i + \varepsilon$$

oss 5.7.1 $\sup E$ e $\inf E$ generalizzano la

nozione di $\max E$, $\min E$ quando questi ultimi non esistono. Infatti

$$\underline{\text{es}} \quad 5.7.1 \quad \text{se } \exists \max E \rightarrow \sup E = \max E$$

$$\text{se } \exists \min E \rightarrow \inf E = \min E$$

ES 5.8.1

$$E = \left\{ \frac{1}{n^2 - 2} : n \in \mathbb{N}, n \geq 3 \right\} \quad (5.8.1)$$

$$E = \left\{ \sum_{j=1}^n j^2 : n \in \mathbb{N} \right\} \quad (5.8.2)$$

Trovare $\sup E$, $\inf E$, e $\max E$, $\min E$
se questi ultimi due esistono.

$$E \text{ in (5.8.1)}: \left\{ \frac{1}{9-2}, \frac{1}{16-2}, \frac{1}{25-2}, \dots \right\}$$

$$\sup E = \frac{1}{7}$$

$$\max E = \frac{1}{7} \quad (\text{esiste})$$

$$\inf E = 0 \quad (\text{va dimostrato})$$

$$\min E \quad \text{non esiste}$$

invoco il lemma 5.7.1: devo dimostrare

$$1) \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3 \quad 0 \leq \frac{1}{n^2 - 2}$$

$$2) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N}, n \geq 3: \frac{1}{n^2 - 2} < \varepsilon$$

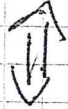
$$\text{E' evidente che } \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3 \Rightarrow \frac{1}{n^2 - 2} > 0$$

$\Rightarrow$ 1) e' soddisfatto

Quello che è meno semplice da dimostrare è

2). Sia $\varepsilon > 0$; cerco (almeno un) $n \in \mathbb{N}$

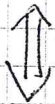
$$n \geq 3 \quad \frac{1}{n^2 - 2} < \varepsilon$$



$$n^2 - 2 > \frac{1}{\varepsilon}$$



$$n^2 > 2 + \frac{1}{\varepsilon}$$



$$n > \sqrt{2 + \frac{1}{\varepsilon}}$$

devo essere
un intero naturale



$$n_\varepsilon := \max\left(3, \left\lceil \sqrt{2 + \frac{1}{\varepsilon}} \right\rceil\right)$$



parte intera inferiore =
minimo intero $\geq \sqrt{2 + \frac{1}{\varepsilon}}$

complicazione quasi inutile.

« n_ε un qualunque $\checkmark$ naturale ≥ 3 e $> \sqrt{2 + \frac{1}{\varepsilon}}$ »

• E in (S.8.2) $E = \left\{ \frac{n(2n+1)(n+1)}{6} : n \in \mathbb{N} \right\}$

$\sup E = +\infty$; $\max E \nexists$

$\inf E = 1 = \min E$

Def 5.10.1

Una funzione $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$

è chiamata successione complessa. Una funzione $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ è chiamata successione reale.

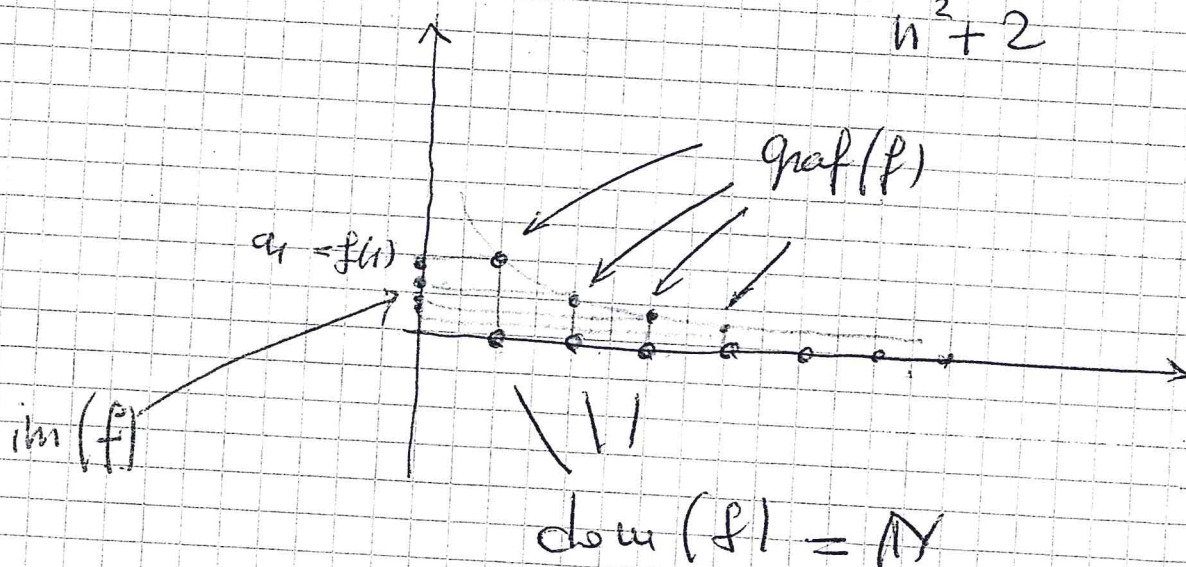
$$n \in \mathbb{N} \mapsto f(n) \in \begin{cases} \mathbb{C} \\ \mathbb{R} \end{cases}$$

Notazioni: Le successioni vengono indicate spesso con (a_n) , (b_n) , (c_n) :
chi è f ?

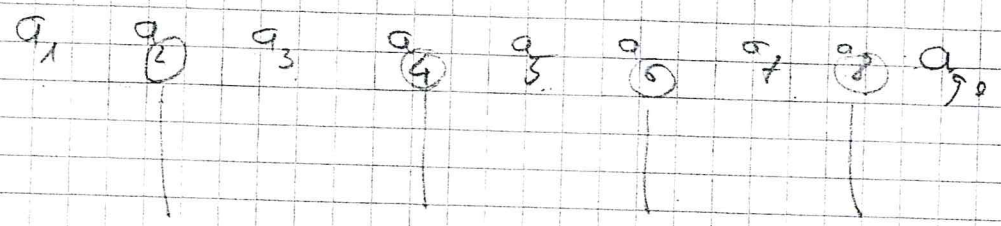
$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(n) = a_n$ elemento n -esimo della successione

Esempio 5.10.1 $a_n = \frac{1}{n^2 + 2}$, $a_1 = \frac{1}{3}$, $a_2 = \frac{1}{6}$, $a_3 = \frac{1}{11}$, $a_4 = \frac{1}{18}$

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(n) = \frac{1}{n^2 + 2}$$



Se considero in esempio (a_{2n}) $a_2 = \frac{1}{6}, a_4 = \frac{1}{18}$



$$\sigma: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

in i pari

$$1 \longrightarrow 2$$

$$i < j \Rightarrow \sigma(i) < \sigma(j)$$

$$2 \longrightarrow 4$$

cioè σ crescente
strettamente

$$3 \longrightarrow 6$$

$$4 \longrightarrow 8$$

$$\sigma: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

in i dispari

$$1 \longrightarrow 1$$

$$2 \longrightarrow 3$$

$$3 \longrightarrow 5$$

l'otto succ. $(a_{\sigma(n)})$

1° element

$$a_{\sigma(1)} = a_2$$

pari

2° element

$$a_{\sigma(2)} = a_4$$

3° element

$$a_{\sigma(3)} = a_6$$

e viceversa

Def 5.11.1 Sia (a_n) una successione reale o complessa.

Sia $\sigma: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ crescente strettamente. Allora

Del punto di vista della funzione,

$\kappa \quad f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ è una successione

$$\mathbb{N} \xrightarrow{\sigma} \mathbb{N} \xrightarrow{f} \mathbb{C}$$

$f \circ \sigma$ è la sotto successione

Def 5.12.1 Sia (a_n) una succ. reale.

Si dice non decrescente se $a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Si dice strett. crescente se $a_n < a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Si dice non crescente se $a_n \geq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Si dice strett. decrescente se $a_n > a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

SERIE A TERMINI POSITIVI

Def 5.12.2. Sia (a_n) una succ. di numeri

non negativi. Possiamo considerare

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad S_n = \sum_{j=1}^n a_j.$$

S_n si chiama somma parziale n-esima della successione (a_n) .

La successione (S_n) si chiama successione delle somme parziali di (a_n) , e il simbolo

$$\sum_{j=1}^{+\infty} a_j \quad \text{indica}$$

(1)

$\sup \{ S_n : n \in \mathbb{N} \}$, e si chiama serie degli a_j .

Caso:

$$\sum_{j=1}^{+\infty} a_j := \sup \left\{ \sum_{j=1}^n a_j : n \in \mathbb{N} \right\} \quad (S.13.1)$$

$E \neq \emptyset$

serie definite.

Def 5.13.1 Sia (a_n) una sca. di numeri
positivi. Si dice che la serie converge $\mathbb{R}$

si sa che $\sum_{j=1}^{+\infty} a_j < +\infty$, e

l'estremo superiore nella (5.13.1) è finito.

Si dice che diverge, e si sa che

$$\sum_{j=1}^{+\infty} a_j = +\infty,$$

oss se l'estremo superiore nella (5.13.1) è $+\infty$
se i termini $\sum_{j=0}^{+\infty} b_j$ alla base della scala $\mathbb{N}$ o di al (per precedenti) $\mathbb{N}$ nella

Es 5.13.1.

Calcolare

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j(j+1)}$$

SERIE DI TENGOLI

$$a_j = \frac{1}{j(j+1)} > 0$$

$$\forall n \in \mathbb{N}$$

16

$$S_n = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j(j+1)}$$

$$\frac{1}{j(j+1)} = \frac{1}{j} - \frac{1}{j+1} \Rightarrow$$

$$S_n = \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{j} - \frac{1}{j+1} \right)$$

$$S_1 = \frac{1}{2}, \quad S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}, \quad S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} \dots$$

(S_n) è strettamente crescente

$$S_n = \left(1 - \cancel{\frac{1}{2}} \right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} \right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} \quad (\text{serie telescopica})$$

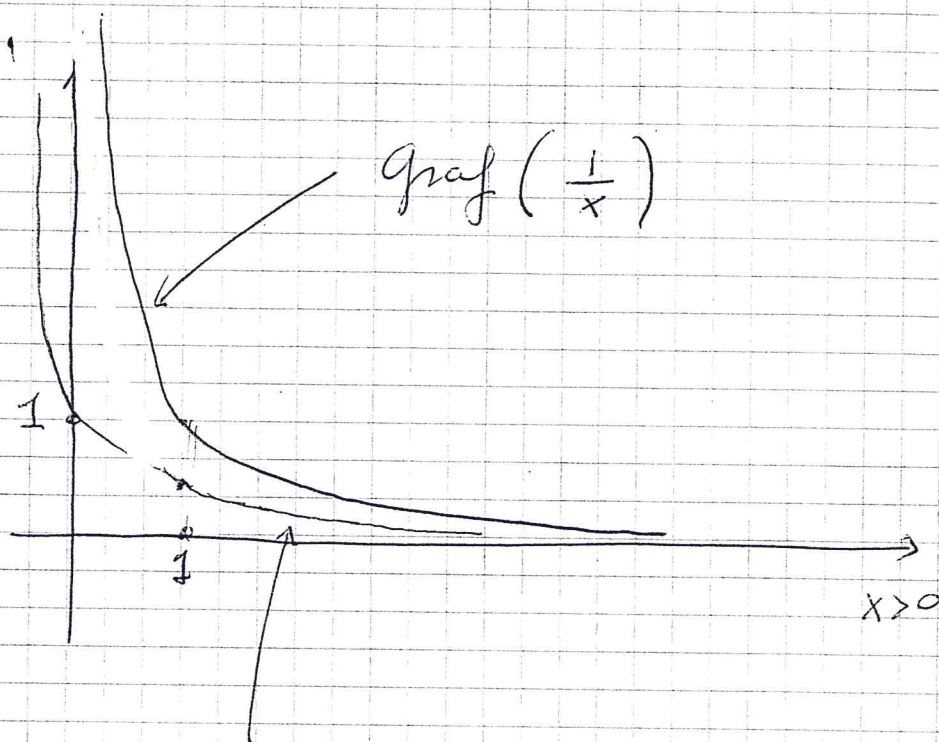
$$\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j(j+1)} = \sup \{ S_n : n \in \mathbb{N} \}$$

$$= \sup \left\{ 1 - \frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\} = 1$$

facile per cosa

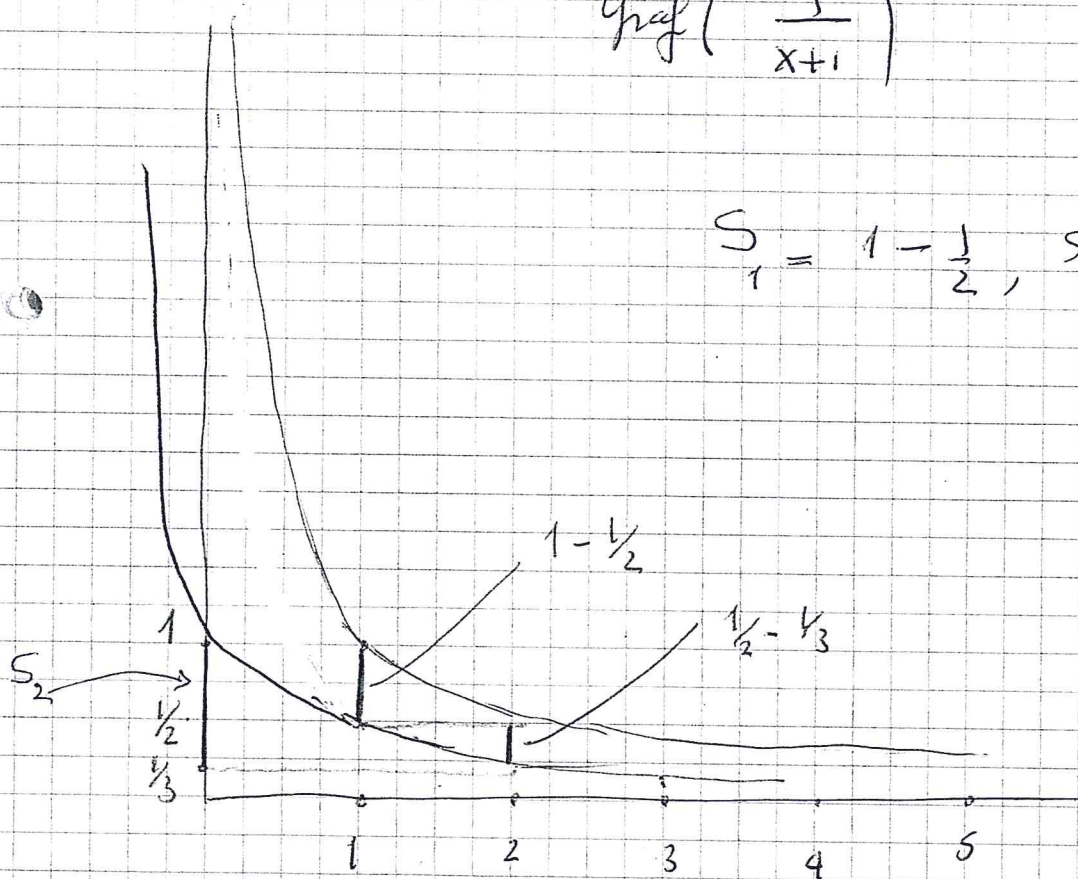
questo sup non è un max (tipicamente succede G_n)

$$S_n = \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{j} - \frac{1}{j+1} \right)$$



$$\text{graf}\left(\frac{1}{x+1}\right)$$

$$S_1 = 1 - \frac{1}{2}, \quad S_2 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)$$



ES 5.16.1 (vedi esercizio 1.5.1) sia $x > 0$

Calcolare

$$\sum_{j=0}^{+\infty} x^j$$

serie geometrica di
ragione x

$$\sum_{j=1}^{+\infty} x^j = \frac{1}{1-x} - 1$$

caso

$\forall n \in \mathbb{N}$ la somma di

$$\sum_{j=0}^n x^j = \begin{cases} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} & \text{se } x \neq 1 \\ n+1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

se $x = 1$

$$\sum_{j=0}^{+\infty} x^j = \sup \{ n+1 : n \in \mathbb{N} \}$$

$= +\infty$

e la serie diverge

se $x \in (0, 1)$:

$$S_n = \sum_{j=0}^n x^j = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

$$\sup \left\{ \frac{1-x^{n+1}}{1-x}, n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \right\} = 2$$

caso $x = \frac{1}{2}$

ES $x = \frac{1}{2}$: $2(1 - (\frac{1}{2})^{n+1})$

ES (Corr) S.17.1

$$x \in (0, 1) \Rightarrow \sum_{j=0}^{+\infty} x^j = \frac{1}{1-x} < +\infty$$

Resta il caso $x > 1$

$$x > 1 \Rightarrow \sum_{j=0}^{+\infty} x^j = +\infty \quad (\text{Corr})$$

Esempio: si può dimostrare di poter fare tutte le operazioni che si fanno con le somme finite:

$$S = 1 + 3 + 9 + 27 + \dots = +\infty$$

$$3S = 3 + 9 + 27 + 81 + \dots$$

$$= 1 + 3 + 9 + 27 + 81 + \dots - 1$$

$$= S - 1$$

$$3S = S - 1 \Rightarrow 2S = -1$$

$$\Rightarrow S = -\frac{1}{2}$$

$$3 \cdot +\infty = +\infty - 1$$

NO $\boxed{3 \cdot +\infty - \infty} = -1$

Le solite operazioni sono valide nelle serie a termini ≥ 0 quando le serie convergono.

Lo strumento «principio» nella teoria delle
serie a termini positivi è il confronto.

(PRINCIPIO DEL CONFRONTO)
Teo 5.18.1

Siano $(a_n), (b_n)$

due successioni a termini non negativi.

Supponiamo $a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

- 1) Se $\sum_{j=1}^{+\infty} b_j < +\infty$ allora $\sum_{j=1}^{+\infty} a_j < +\infty$.
- 2) Se $\sum_{j=1}^{+\infty} a_j = +\infty$ allora $\sum_{j=1}^{+\infty} b_j = +\infty$.