

Lezione 4 1/10/19

9-11

Modalità esame: 6 appelli in un anno acc.

Ogni appello: $\left\{ \begin{array}{l} \text{Scritto} \leq 3 \text{ ore} \\ \text{orale} \text{ con} \text{ max } 1 \text{ giorno dopo} \end{array} \right.$ "discreti"

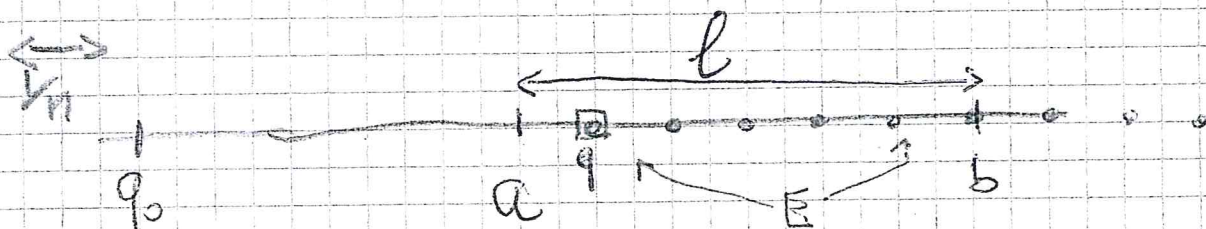
Sequenziare online
Le VScritte $\hat{=}$ "maubenti" $\hat{=}$ ^{do} all' inizio d.
una settimana.

Teo 4.11 (vedi teo 3.10.1). $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$.

Dim Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Devo dim. che $\exists q \in \mathbb{Q} : a < q < b$

Scelgo $q_0 \in \mathbb{Q}$, $q_0 < a$



lo so fare questa scelta perché esistono
razionali arbitrariamente piccoli (ad
esempio "molto negativi")

Sia $l = b - a$. Sia poi

no $n \in \mathbb{N}$ tale che $\frac{1}{n} < b - a = l$

Poss fare questa scelta: basta prendere

$$n > l$$

(e esistono numeri naturali arbitrariamente grandi).

Definisco $E := \{m \in \mathbb{N} : q_0 + \frac{m}{n} > a\}$

Dico che $E \neq \emptyset$; basta prendere $m \in \mathbb{N}$ tale che $m > n(a - q_0)$

(n, a, q_0 sono stati fissati). Dal fatto che $(\mathbb{N}, \leq)$ è bene ordinato (proprietà

2) pg 3 lemma 1) segue che

$$\exists ! \min E =: \overline{m}$$

Nel dunque, l'indice corrispondente a $\square$ è $\overline{m}$. Definiamo

$$q = q_0 + \frac{\overline{m}}{n} = \square$$

Dico che q è proprio il numero razionale di Censo. Devo dim. che $q \in \mathbb{Q}$ e che $a < q < b$.

$$\underbrace{q_0}_{\in \mathbb{Q}} + \underbrace{\frac{\bar{m}}{n}}_{\in \mathbb{Q}} \Rightarrow q \in \mathbb{Q}$$

vediamo che $q > a$: poiché $\bar{m} = \min E$

si ha (vedi Def. 1.3.1 (i)) $\bar{m} \in E$,

questo vuol dire $\underbrace{q_0 + \frac{\bar{m}}{n}}_q > a$.

Resta da dim. che $q < b$. U.L.

la (ii) della Def 1.3.1. $\bar{m} - 1 \notin E$

lunque $q_0 + \frac{\bar{m} - 1}{n} \leq a$

$$q_0 + \frac{\bar{m}}{n} - \frac{1}{n} = q - \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow q - \frac{1}{n} \leq a \Rightarrow q \leq a + \frac{1}{n} < a + b$$

$$= a + b - a = b$$

ES 4.4.1

$$FD = \left\{ \frac{p}{10^k} : p \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \right\}$$

$$ND = \left\{ \frac{-p}{2^k} : p \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \right\}$$

sono densi in $\mathbb{R}$.

Il fatto che $\mathbb{Q}$ sia denso in $\mathbb{R}$
aiuta a farsi un'idea della struttura
di $\mathbb{R}$ stesso.

Ricapitolando

$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ non è bene ordinato

$\mathbb{Q}$ è numerabile (Lemma 3)

$\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$

Cosa formano linee in $\mathbb{R}$: sono
liste infinite di numeri ^{razionali o irrazionali} tra 0 e 9 ^{dopo la}
^{e prima della virgola sono una lista finita} ^{virgola}
V (forse negativi). Consideriamo
quelle liste che non hanno 9
da un certo punto in poi.

Teo 4.4.1 (CANTOR)

$\mathbb{R}$ non è numerabile.

Globale
non ha la stessa cardinalità
naturale di $\mathbb{N}$, cioè $\nexists f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$
iniettiva e surgettiva.

« Non posso contare i numeri reali »

« non posso parlare del primo numero
reale, del secondo numero reale »

Di questo teorema Cantor ha dato 2

dimostrazioni, la seconda usa la
compattazione di $[0,1] \subset \mathbb{R}$, e la

faremo quando dimostreremo il
teorema di Bolzano-Weierstrass.

Diamo qui la 1^a dimostrazione, che
si basa sul principio diagonale.

Dim: Supponiamo ^(per assurdo) di potere mettere
in corrispondenza biunivoca i numeri
naturali con i numeri reali.

Questo vuol dire che posso contare tutti
i numeri reali. In contraddizione, posso contare

tutti i numeri reali in $[0, 1]$.

$$r_1 = 0, 921354 \dots$$

$$r_2 = 0, 441325478 \dots$$

$$r_3 = 0, 77162132130 \dots$$

$$r_4 = 0, 987654321098 \dots$$

$$r_5 = \dots$$

Sia $k \in \mathbb{N}$: definisco

$$y_k = \begin{cases} 5 & \text{se la } k\text{-esima cifra dopo} \\ & \text{la virgola } \dots e^{-4} \text{ di } r_k \\ 4 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

ad esempio

$$k = 1$$

$$y_1 = 4$$

$$k = 2$$

$$y_2 = 5$$

$$k = 3$$

$$y_3 = 4$$

$$k = 4$$

$$y_4 = 4$$

Definisco

$$y := 0, y_1 y_2 y_3 y_4 \dots \in [0, 1]$$

Nell'esempio

$$y = 0, 4544 \dots$$

Poiché per assurdo $[0,1]$ è numerabile,

$$\exists h \in \mathbb{N} : y = r_h$$

Andiamo a vedere la h -esima cifra y_h di y dopo la virgola:

$$y_h = \begin{cases} 5 & \text{se } y_h = 4 \\ 4 & \text{se } y_h \neq 4 \end{cases}$$

assurdo.

□

$$\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$$

$\mathbb{Q}$ è numerabile

$\mathbb{R}$ non è numerabile, $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (gli irrazionali) non sono numerabili.

« Ci sono molti più numeri irrazionali che numeri razionali »

$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C}$$

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ con il $\leq$ sono totalmente ordinati.

($\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ non sono bene ordinati), $\mathbb{C}$ non ha un ordinamento canonico.

Proprietà fondamentale di $\mathbb{R}$ (dell'elemento 8

separatore):

Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}$

$$A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$$

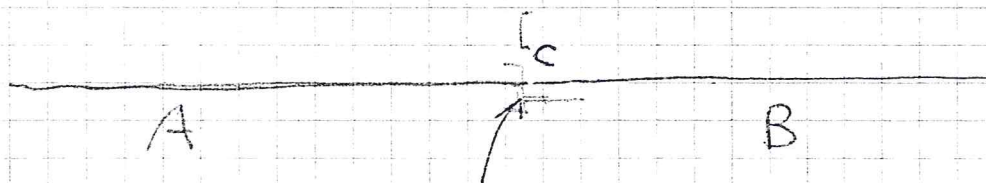
$$A \cup B = \mathbb{R}$$

$$\forall a \in A \quad \forall b \in B \quad a \leq b$$

Allora $\exists! c \in \mathbb{R}$ (detto elemento
separatore tra A e B) tale che

$$\forall a \in A \quad \forall b \in B \quad a \leq c \leq b$$

« Due semirette con al + un estremo in comune
hanno un elemento separatore »



deve essere o grigio o verde

« c ha tutti i punti grigi non alla sua destra
ha tutti i punti verdi non alla sua sinistra »

OSS 4.3.1

Ⓚ

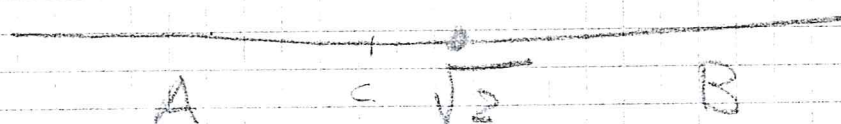
Non ha la proprietà dell'elemento

separatore

In fatti basta considerare

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : x < \sqrt{2}\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{Q} : x > \sqrt{2}\}$$



$$A, B \neq \emptyset$$

$$A \cup B = \mathbb{Q}$$

Esistono in $\mathbb{Q}$ a, b non esiste

$$c \in \mathbb{Q} \text{ tale che } a \leq c \leq b$$

$$\forall a \in A, \forall b \in B$$

(usare la densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$)