

Lezione 3

26/9/19

9-11

1

Abbiamo visto alcune proprietà di $\mathbb{N}$

Es 3.1.1 Sia X un insieme finito

(cioè avente un numero finito di elementi)

Allora X non può essere messo in

corrispondenza biunivoca con un suo
sottoinsieme proprio (cioè diverso da X)

Es 3.1.2 $\mathbb{N}$ è infinito.

Def 3.1.1 X, Y insiemi, si dicono

avere la stessa cardinalità se

$\exists f: X \longleftrightarrow Y$ iniettiva e surgettiva
(cioè biunivoca)

Def 3.1.2 Un insieme X si dice

NUMERABILE k ha la stessa cardinalità
di $\mathbb{N}$.

Ricordiamo che $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$

interi. $\mathbb{Z} \supseteq \mathbb{N}$, anzi $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z}$

(a volte si scriva $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$)

2

ES 3.2.1 $\mathbb{Z}$ ha la stessa cardinalità di $\mathbb{N}$. Dunque $\mathbb{Z}$ si può mettere in corrispondenza biunivoca con una sua sottoinsieme proprio.

« Insieme storicamente $\mathbb{Z}$ è più grande di $\mathbb{N}$, ma ha lo stesso numero di elementi »

Prima di studiare ulteriori proprietà di $\mathbb{N}$, in particolare la $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, studiamo un po' di $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$.

$\mathbb{Q}$ = insieme dei numeri razionali.

Teo 3.2.1 $\mathbb{Q}$ è numerabile.

Note $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q}$

« Il teo 3.2.1 dice che gli elementi di $\mathbb{Q}$ si possono contare: infatti se $\mathbb{Q}$ è numerabile, allora $\exists$ $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ bigettiva »

$$f(1) \in \mathbb{Q}$$

$$f(2) \neq f(1), f(2) \in \mathbb{Q} \quad \text{ecc.}$$

$$\forall r \in \mathbb{Q} \quad \exists ! n \in \mathbb{N} : f(n) = r$$

allora f sta dichiarando

$$f(1) \quad \text{è il razionale } n^{\circ} 1$$

$$f(2) \quad \text{" " " " } n^{\circ} 2$$

$$f(3) \quad \text{" " " " } n^{\circ} 3$$

ecc.

$\Rightarrow$

Dm del teo 3.2.1. Passi migliori:

passo 1) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ è numerabile

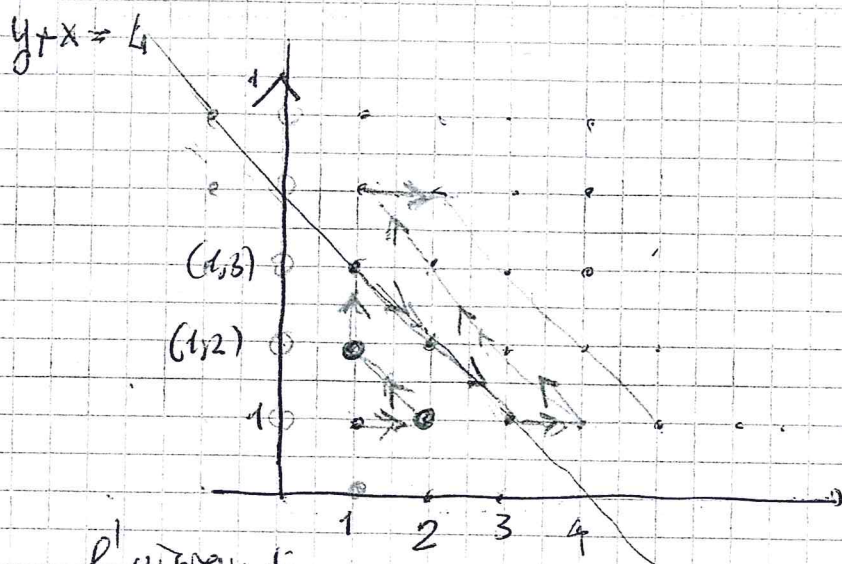
$$\left(\begin{array}{l} \text{Mole} \\ \text{prodotto cartesiano} \\ \text{di } X \text{ per } Y \end{array} \right) X \times Y = \left\{ (x, y) : x \in X, y \in Y \right\}$$

$\uparrow$
 coppia ordinata $:= \{ \{x\}, \{x, y\} \}$

$$\text{Coi' Come } (\mathbb{N} \cup \{0\}) \times (\mathbb{N} \cup \{0\})$$

$$\text{Coi' Come } (\mathbb{N} \cup \{0\}) \times \mathbb{N}$$

Dimostriamo ad esempio che $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ è numerabile.



l'insieme di
vedo questi punti della griglia a
coordinate naturali come unione
numerabile di insiemi finiti

$$y + x = k \in \mathbb{N}, \quad k \geq 2$$

$$I_k = \{ (x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : x + y = k \}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad k \geq 2$$

il numero di elementi di I_k è $k-1$

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}, k \geq 2} I_k = \text{unione numerabile di insiemi finiti}$$

e ogni I_k è finito.

Vale l'esempio che ogni insieme che

si possa scrivere come unione finita numerabile di insiemi finiti è numerabile.

Dunque $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ è numerabile.

51

Con lo stesso metodo si dimostra che

$(\mathbb{N} \cup \{0\}) \times \mathbb{N}$ è numerabile.

parte 2) ~~Dimostrare che~~

Nello stesso modo si dimostra che

$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ è numerabile, e che

$\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ è numerabile

parte 2)

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, (p, q) = 1 \right\}$$

↑
1 p e q primo tra loro

Posso pensarla come

$$\{ (p, q) : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, (p, q) = 1 \}$$

che non è esattamente $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ a causa del « vincolo » $(p, q) = 1$

1	2	3
$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$

Definido de $\frac{p}{q} \sim \frac{n}{m}$ (ver 1)

(" $\frac{p}{q}$ é equivalente a $\frac{n}{m}$ ") e

$$pm = qn$$

Ex 3.6.1 $\sim$ é uma relação de equivalência, com uma relação binária

1) reflexiva $x \sim x$

3') simétrica $x \sim y \rightarrow y \sim x$

2) transitiva $x \sim y, y \sim z \rightarrow x \sim z$

Exemplos 1) reflexiva: $\frac{p}{q} \sim \frac{p}{q}$ si $pq = qp$

3') simétrica: $\frac{p}{q} \sim \frac{m}{n} \Leftrightarrow \frac{m}{n} \sim \frac{p}{q}$



$$pn = qm$$



$$mq = np$$

2) transitiva:

$$\frac{p}{q} \sim \frac{m}{n}, \frac{m}{n} \sim \frac{h}{k} \stackrel{?}{\Rightarrow} \frac{p}{q} \sim \frac{h}{k}$$

$$pn = qm$$

$$mk = nh$$

$$\stackrel{?}{\Rightarrow} pk = qh$$

Intervalo quociente $\{ (p, q) : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \}$

$\sim$

27

Dato (p, q) ,

$[(p, q)] =$ classe di equivalenza di (p, q)

$$= \{(n, m) : (n, m) \sim (p, q)\}$$

Insieme quoziente := $\{[(p, q)] : (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}\}$

= insieme delle classi di equivalenza

Es 3.7.1 Se X è un insieme,

$\sim$ è una relazione di equivalenza su X

$$X/\sim = \{[x] : x \in X\}. \text{ Allora}$$

due classi di equivalenza o coincidono
o sono disgiunte.

Quindi $[x]$ ha partizionato $X/\sim$ in
insiemi tra loro disgiunti che ricoprono
tutto (si chiama partizione)

Es 3.7.2 Una partizione di un insieme
numerabile o è finita o è numerabile.

Ne segue che $\{(p, q) : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, (p, q) \neq 1\}$

$\mathbb{N}$	$\subseteq$	$\mathbb{Q}$	
$\mathbb{N}$ è infinito		$\mathbb{Q}$ è infinito	
$\mathbb{N}$ è numerabile		$\mathbb{Q}$ è numerabile	
$\leq$ ordine totale		$\leq$ ordine totale	
$\mathbb{N}$ è bene ordinato		$\mathbb{Q}$ non è bene ordinato	
$\mathbb{N}$ non è denso in $\mathbb{R}$ non è denso in $\mathbb{Q}$		$\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$	

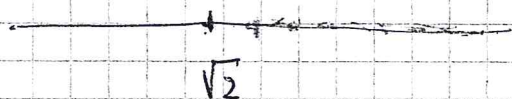
Non è vero che qualunque sottoinsieme di

$\mathbb{Q}$ ammette (il) minimo elemento; ad

esempio $\mathbb{Q}$ non ammette minimo elemento.

Esempio 8.3.1
Anche

$$E = \{ x \in \mathbb{Q} : x > \sqrt{2} \} \neq \emptyset$$



E non ha minimo!

Segue dal fatto che $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ e

dal fatto che $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists r \in \mathbb{Q}$

(3.8.1)

$$r \in [\sqrt{2}, \sqrt{2} + \varepsilon)$$

ES 3, 9, 1

$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

9

(pi vediamo $e \notin \mathbb{Q}$, $\pi \notin \mathbb{Q}$...)

$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$: per assurdo $\exists p \in \mathbb{N}, \exists q \in \mathbb{N}$:

$(p, q) = 1$;

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

$\Downarrow$

$$2 = \frac{p^2}{q^2}$$

$\Downarrow$

$$2q^2 = p^2$$

$\Downarrow$

p^2 è divisibile per 2 (p^2 è pari)

$\Downarrow$

p è divisibile per 2 (p è pari)

$$\exists k \in \mathbb{N} : p = 2k$$

$\Downarrow$

$$p^2 = 4k^2$$

$\Downarrow$

$$2q^2 = 4k^2 \Rightarrow q^2 = 2k^2$$

$\Rightarrow q^2$ è pari $\Rightarrow q$ è pari; $(p, q) \neq 1$, $\checkmark$ assurdo.

La (3.8.1) segue da una importante proprietà
di $\mathbb{Q}$: (prendi $a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{2} + \varepsilon$)

Teo 3.10.1: (" $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$ ")

Siano $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Allora $\exists r \in \mathbb{Q}$: $a < r < b$



Nota Da teo 3.10.1 segue che
esistono infiniti numeri razionali (distinti)

Compresa tra a e b .

Nota Da teo 3.10.1 segue che
ogni numero reale si può approssimare
bene quanto si vuole con un qualche
numero razionale.

Nota Con la stessa dimostrazione di teo 3.10.1
si vede che esistono altri sottoinsiemi di
 $\mathbb{R}$ densi:

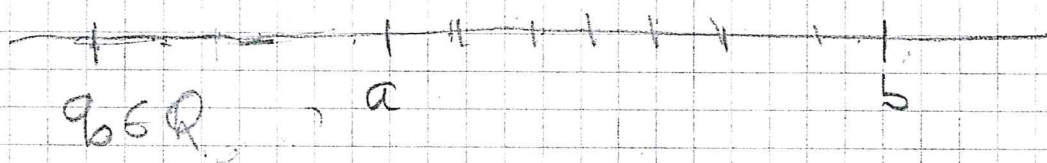
ad esempio

$$\left\{ \frac{p}{10^k} : p \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \right\}$$

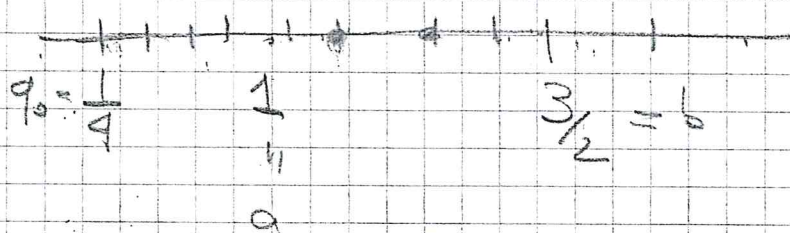
o anche

$$\left\{ \frac{p}{2^k} : p \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \right\}.$$

Idea della dimostrazione del teo 3.10.1 (che
dimostreremo la prossima volta)



$$\text{ngm} \quad \frac{1}{n} < b - a$$



$$\frac{1}{2} = b - a$$

$$n = 5$$

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{5} < \frac{1}{2}$$