

Se $I = [a, b]$ intervallo compatto (*)
e $f: I \rightarrow [0, +\infty)$ continua

allora $\int_a^b f(x) dx < +\infty$

Ci sono casi interessanti di integrali in

cui le ipotesi (*) non sono verificate:

ad esempio $I = [a, b)$, $f \in \mathcal{C}(I)$, $f \geq 0$

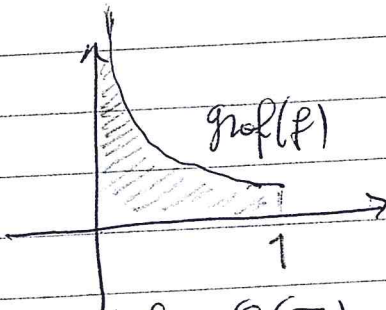
oppure $I = [a, +\infty)$, $f \in \mathcal{C}(I)$, $f \geq 0$

oppure f non continua su I

oppure I non è un intervallo, o in generale
una combinazione di tutte queste possibilità.

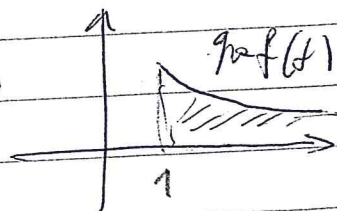
Esempi espliciti:

1) $I = (0, 1]$ non chiuso



$f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$, $\alpha > 0$; $f \in \mathcal{C}(I)$

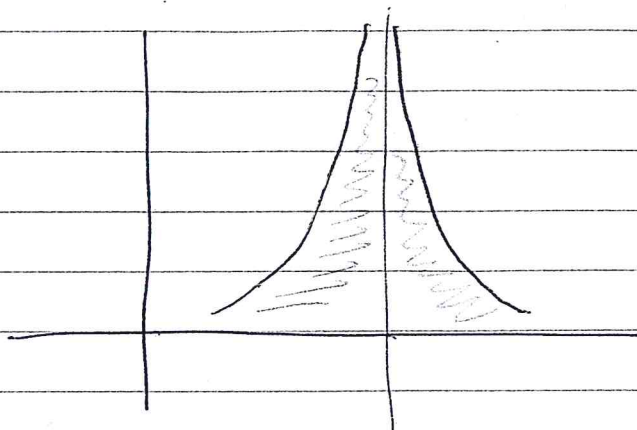
2) $I = [1, +\infty)$, $f(x) = \frac{1}{x^\beta}$, $\beta > 0$



$f \in \mathcal{C}(I)$

non limitato.

3) I non esiste



Ci si chiede condizioni sufficienti (che
 rimpiazzino $(*)$) in modo da avere
 ancora $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx < +\infty$.

Esercizio 36.2.1

Per quali $\alpha > 0$ ha

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx < +\infty$$



$\alpha = 1$
 $1 > \varepsilon > 0$

$$\int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x} dx = [\log x]_{\varepsilon}^1 = -\log \varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} +\infty$$

Per $\alpha = 1$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x} dx = +\infty$$

$$\text{ii} \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$$

$$\left(\frac{1}{10}\right)^2$$

$$\alpha > 1$$

$$1 > \varepsilon > 0$$

$$\int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x^{\alpha}} dx = \frac{1}{-\alpha+1} \left[x^{-\alpha+1} \right]_{\varepsilon}^1$$

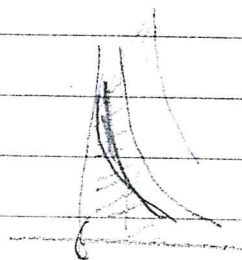
$$= \frac{1}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{\varepsilon^{-\alpha+1}}$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x^{\alpha}} dx = +\infty$$



ii

$$\int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha}} dx$$



Results (le overs)

$\text{le } \alpha = 1$ $\text{le } \alpha > 1$	$\Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha}} dx = +\infty$
--	--

$$\text{le } 0 < \alpha < 1$$

$$\varepsilon > 0$$

$$\int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x^{\alpha}} dx = \frac{1}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{\varepsilon^{-\alpha+1}}$$

$$\Rightarrow \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x^{\alpha}} dx = \frac{1}{1-\alpha} \in (0, +\infty)$$

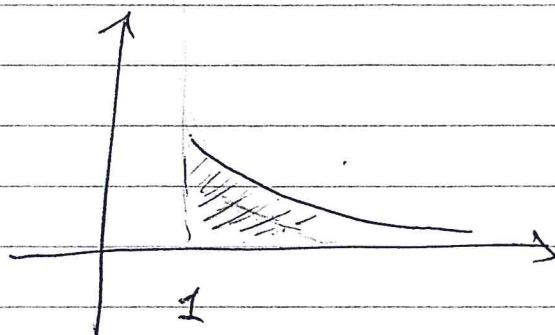
$\int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha}} dx$

$\text{le } 0 < \alpha < 1 \Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha}} dx < +\infty$	(34.3.1)
--	----------

34.4.1

$$f(x) = \frac{1}{x^\beta}, \quad x \geq 1$$

$$\beta > 0$$



$$\beta = 1$$

$$n \gg 1$$

$$\int_1^n \frac{1}{x^\beta} dx = \left[\log x \right]_1^n = \log n$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^n \frac{1}{x^\beta} dx = +\infty$$

$$\beta > 1$$

$$\int_1^n \frac{1}{x^\beta} dx = \frac{1}{1-\beta} \left[x^{1-\beta} \right]_1^n$$

$$= \frac{1}{1-\beta} (n^{1-\beta} - 1)$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^n \frac{1}{x^\beta} dx < +\infty \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\beta} dx < +\infty$$

Risultato finale:

$$\beta = 1 \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\beta} dx = +\infty$$

$$0 < \beta < 1 \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\beta} dx = +\infty$$

$$\beta > 1 \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\beta} dx < +\infty$$

Te (criterio di integrabilità): $f, g: [1, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$

$f = O(g)$ per $x \rightarrow +\infty$, cioè

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = C > 0. \quad (34.5.1)$$

Allora

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx < +\infty \iff \int_1^{+\infty} g(x) dx < +\infty$$

Supponiamo $\forall I \subset [1, +\infty)$ intervallo limitato
 $\int_I f dx < +\infty, \quad \int_I g dx < +\infty$

(Nota: enunciato equivalente, dato da (34.5.1))

equivalente a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{1}{C} > 0$

Dim che $\left(\int_1^{+\infty} f(x) dx < +\infty \right) \iff$ se vale (34.5.1),

$$\exists \bar{x} > 1; \quad f(x) \leq C' g(x) \leq C'' f(x)$$

$$\exists C', C'' > 0$$

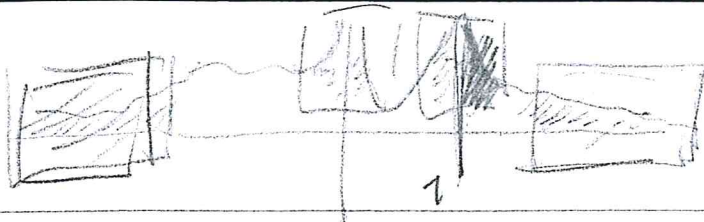
Alora

$$\int_1^{+\infty} g(x) dx = \underbrace{\int_1^{\bar{x}} g(x) dx}_{\text{finito (ipotesi)}} + \int_{\bar{x}}^{+\infty} g(x) dx$$

$$\lambda > 0, \quad \lambda = C''/C'$$

$$\int_{\bar{x}}^{+\infty} f(x) dx \leq \int_{\bar{x}}^{+\infty} \frac{1}{\lambda} g(x) dx < +\infty$$

finito $\leq \int_1^{+\infty} f dx < +\infty$



ES 34.6.1

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x^2-1|^{\frac{1}{2}} \left(\log(x)\right)^2}{|x|^{\frac{5}{2}} |\log|x||} dx$$

$I = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$ non limitato

$$f(x) = \frac{|x^2-1|^{\frac{1}{2}} (\log(x))^2}{|x|^{\frac{5}{2}} |\log|x||} \geq 0, \quad \text{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$$

es: Impossibile trovare le primitive.

Singolarità da considerare:

vicino a $-\infty$

vicino a $+\infty$,

$x=0$,

$x=1$

$x \gg 1$ (il caso $x \ll -1$ è simile, usando i valori assoluti)

$$f(x) \sim \frac{x}{x^{\frac{5}{2}} \log x} = g(x) \approx \frac{1}{x^{\frac{3}{2}} \log x}$$

$f = \mathcal{O}(g)$ su $[1, +\infty)$.

$$\int_1^{+\infty} g(x) dx < +\infty ?$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}} \log x} dx \leq \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} dx < +\infty$$

in es. 34.6.1

$x \approx 1$?

Vicino a $x=1$ l'argomento di f

è quello di $\frac{|x^2-1|^{1/2}}{|\log|x||} = \frac{|(x-1)(x+1)|^{1/2}}{|\log|x||}$

$\Rightarrow$ vicino a $x=1$, l'argomento di f

è quello di $\frac{|x-1|^{1/2}}{|\log|x||} = h(x)$

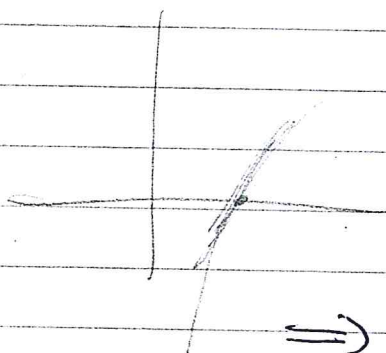
Proviamo per $\lim_{x \rightarrow 1} h(x)$ su $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

se $x > 1$

$$h(x) = \frac{(x-1)^{1/2}}{\log x} = \frac{(x-1)^{1/2}}{\log(1+(x-1))}$$

$$x-1 = t$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t^{1/2}}{\log(1+t)}$$



$$\frac{t^{1/2}}{\log(1+t)} = \frac{t^{1/2}}{t+o(t)} = \frac{1}{t^{1/2}+o(t^{1/2})}$$

$\Rightarrow$
(34.3.1)

$$\int_0^\varepsilon h(t) dt < +\infty$$

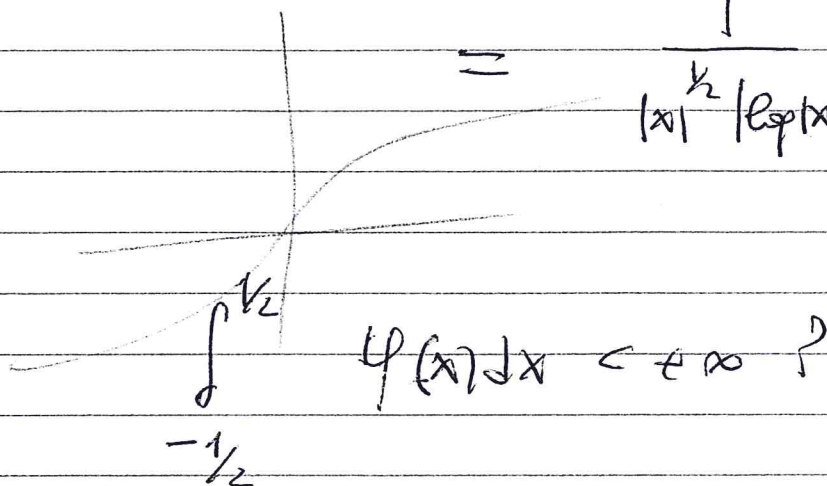
$$\Rightarrow \int_1^2 f(x) dx < +\infty$$

Per $x \rightarrow 1^-$ argomento simili.

x vicino a zero

$$f(x) \sim \frac{(\log(x))^2}{|x|^{5/2} |\log|x||} \sim \frac{x^2}{|x|^{5/2} |\log|x||}$$

$$= \frac{1}{|x|^{1/2} |\log|x||} = \varphi(x)$$



$$\int_{-1/2}^{1/2} \varphi(x) dx < +\infty$$

Per con.

Altri tipi di integrale (ricerca di primitive):

$$\int \sqrt{1-x^2} dx \quad (\sin \theta)^2 + (\cos \theta)^2 = 1$$

$$\int \sqrt{x^2-1} dx$$

$$\int \frac{x}{x + \sqrt{x^2-1}} dx$$

Integrali abeliani
[PRODI, ANALISI MATEMATICA,
BORGONIERI], pg. 331
e seguenti

« Quando l'comparso delle radici quadrate di
solito il calcolo delle primitive è difficile e non
impossibile »

Per questo si prende $\int \sqrt{1-x^2} dx$

$$x = \cos \theta$$

$$= \int \sqrt{1 - (\cos \theta)^2} \cos \theta d\theta$$

$$= \int (\cos \theta)^2 d\theta$$

Tutto diverso è il calcolo delle primitive di $\sqrt{x^2-1}$:

$$\int \sqrt{x^2-1} dx$$

$$x = \frac{1+t^2}{2t}$$

(come nasce: servirebbe un'altra
lettera)

Con questo cambio di variabile:

$$x^2 = \frac{(1+t^2)^2}{4t^2}, \quad x^2-1 = \frac{(1+t^2)^2}{4t^2} - 4t^2$$

$$\int \sqrt{x^2-1} dx = \underset{\text{con}}{\uparrow} -\frac{1}{4} \int \frac{(t^2-1)^2}{t^3} dt$$

che è un integrale $\int \frac{P}{Q} dt$ con grado

$\text{grado}(P) > \text{grado}(Q)$, dunque è necessario

l'algoritmo di divisione con resto

$$= -\frac{1}{4} \int \left(t - \frac{2}{t} + \frac{1}{t^3} \right) dt = \dots \text{ da esprimere poi nella variabile } x$$

$$= \text{risultato finale} = \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 - 1} + \frac{1}{2} \log(x - \sqrt{x^2 - 1}) + c$$

$$\int \frac{x}{x + \sqrt{x^2 - x}} dx$$

Posto $x = \frac{1}{1+t^2}$, si ha

$$\int \frac{x}{x + \sqrt{x^2 - x}} dx = - \int \frac{2t}{(1+t)(1+t^2)^2} dt$$

anche questo è trasformato in un integrale

razionale, per cui ora:

$$\text{Risultato finale} = \log(\sqrt{x} + \sqrt{1-x}) - \arctg \sqrt{\frac{x-1}{x}} + c$$