

Lezione 33 11/12/2019

9-13

Suggerimento in gli esercizi a pag 9 lezione 32:

$$\begin{aligned} \int_1^3 \frac{e^x}{1+e^x} dx &= \int_e^{e^3} \frac{y}{1+y} \frac{1}{y} dy \\ e^x &= y \\ &= \int_e^{e^3} \frac{1}{1+y} dy \\ &= [\log(1+y)]_e^{e^3} = \\ &= \log(1+e^3) - \log(1+e) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{2+4x^2} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+2x^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+(\frac{x}{\sqrt{2}})^2} dx = \end{aligned}$$

= come ad esempio pag 12 lezione 30

$$\int x^3 \cos x dx = + 3 \int x^2 \cos x dx - x^3 \cos x$$

$$\begin{matrix} f & g' \\ & g \end{matrix} = -6 \int x \cos x dx + 3x^2 \sin x - x^3 \cos x$$

= continuare a cosa

$$= +6 \cos x + 6x \sin x + 3x^2 \cos x - x^3 \sin x$$

$$\int \frac{4^x + 1}{2^x + 1} dx = \int \frac{y^2 + 1}{y + 1} \frac{1}{y \log 2} dy$$

$$y = 2^x$$

$$4^x = (2^2)^x = y^2$$

$$\frac{d}{dx} 2^x = \frac{d}{dx} e^{x \log 2} = 2^x \log 2$$

$$= \frac{1}{\log 2} \int \frac{y^2 + 1}{y(y + 1)} dy$$

= a mano, oppure con la tecnica degli

integrali razionali che faremo tra poco.

Abbiamo visto Taylor con resto di Lagrange (25.5.1), con resto di Peano (29.2.1)

Teorema 33.2.1 (Taylor con il resto integrale).

Sia $f: [x_0, x_0 + \delta] \rightarrow \mathbb{R}$

$f \in C^{(n+1)}([x_0, x_0 + \delta])$

Allora $\forall x \in [x_0, x_0 + \delta]$ vale lo sviluppo

$$(33.2.1) \quad f(x) = T_n f(x_0; x) + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt$$

$$\text{dove } T_n f(x_0; x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$$

Dw Per induzione su $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$;

se $n=0$ in (33.2.1) ottengo $f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(t) dt$

è vero (oss. 32.1.1)

Supponiamo ora adesso la (33.2.1) e

cerchiamo di dimostrare:

se $f \in E^{n+2}([x_0, x_0 + \delta])$ allora

$$f(x) = T_{n+1} f(x_0; x) + \frac{1}{(n+1)!} \int_{x_0}^x (x-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t) dt$$

Scriviamo il resto integrale della (33.2.1):

$$\frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt \quad (33.3.1)$$

L'unico strumento che ho a disposizione in

per manipolare $f^{(n+2)}(t)$ nella (33.3.1)

è il teo di integrazione per parti

(teo. 32.1.1); è necessario vedere

$(x-t)^n$ come derivata (rispetto a t) di

qualcosa: $(x-t)^n = \frac{d}{dt} \left(-\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} \right)$

Quindi

$$(33.3.1) = \frac{+1}{(n+1)} \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t) dt$$

$$+ \left[-\frac{1}{(n+1)n!} (x-t)^{n+1} f^{(n+1)}(t) \right]_{x_0}^x =$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} \int_{x_0}^x (x-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t) dt$$

$$- \frac{1}{(n+1)!} \left[(x-t)^{n+1} f^{(n+1)}(t) \right]_{x_0}^x$$

Il

$$\frac{1}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} f^{(n+1)}(x_0)$$

Si deduce che

$$(33.3.1) = \frac{1}{(n+1)!} \int_{x_0}^x (x-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t) dt$$

$$+ \frac{1}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} f^{(n+1)}(x_0)$$

⇒

$$(33.2.1) = T_n f(x_0; x) + \frac{1}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} f^{(n+1)}(x_0)$$

$$+ \frac{1}{(n+1)!} \int_{x_0}^x (x-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t) dt$$

$$= T_{n+1} f(x_0; x) + \frac{1}{(n+1)!} \int_{x_0}^x (x-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t) dt$$

□

INTEGRALI RAZIONALI

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx \quad \text{con } P, Q \text{ polinomi a}$$

coefficienti reali (e integro "lontano" dagli zeri di Q)

esempio $\int \frac{1}{1+x^2} dx$, $\int \frac{3x+9}{x^2-6x} dx$,

$$\int \frac{1}{x^4+1} dx \quad \text{ecc.}$$

Il caso difficile è grado $(P) \geq \text{grado}(Q)$

(alternativi us l'algoritmo di divisione)

C'è una ricetta generale: siano P, Q polinomi a coefficienti reali, $\text{grado}(P) < \text{grado}(Q)$:

Per calcolare $\int \frac{P}{Q} dx$:

(Ricerca delle radici di Q)

1) trovare tutte le radici di Q (che potrebbe

essere impossibile), sia quelle reali che

quelle complesse, con le loro rispettive

moltiplicità:

$x_1, \dots, x_r$ radici reali di Q , di
rispettive molteplicità

$m_1, \dots, m_r$,

$z_1, \dots, z_c$ radici complesse (non reali) di Q

($\Rightarrow \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_c$ sono anch'esse radici di Q)

di molteplicità rispettivamente

$\mu_1, \dots, \mu_c$

Da qui $Q(x) = c \overset{0}{+} (x-x_1)^{m_1} \dots (x-x_r)^m \cdot (x-z_1)^{\mu_1} (x-\bar{z}_1)^{\mu_1} \dots$
 $\dots (x-z_c)^{\mu_c} (x-\bar{z}_c)^{\mu_c}$

2) (decomposizione di $\frac{P}{Q}$): si può scrivere

$$\frac{P}{Q} = \frac{R_{11}}{(x-x_1)} + \dots + \frac{R_{1m_1}}{(x-x_1)^{m_1}} +$$

$$+ \frac{R_{r1}}{(x-x_r)} + \dots + \frac{R_{rm_r}}{(x-x_r)^{m_r}} +$$

$$+ \frac{C_{11}x + D_{11}}{(x-z_1)(x-\bar{z}_1)} + \dots + \frac{C_{1\mu_1}x + D_{1\mu_1}}{(x-z_1)^{\mu_1}(x-\bar{z}_1)^{\mu_1}}$$

$$+ \dots + \frac{C_{c1}x + D_{c1}}{(x-z_c)(x-\bar{z}_c)} + \dots + \frac{C_{c\mu_c}x + D_{c\mu_c}}{(x-z_c)^{\mu_c}(x-\bar{z}_c)^{\mu_c}}$$

per cui si possono costruire i coefficienti reali $R_{11}, \dots, R_{1m_1}, \dots, R_{r1}, \dots, R_{rm_r}, \dots$
 $C_{11}, D_{11}, \dots, C_{1\mu_1}, D_{1\mu_1}, \dots, C_{c1}, D_{c1}, \dots, C_{c\mu_c}, D_{c\mu_c}$

Oss 33.7.1 se $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}(x-z)(x-\bar{z}) &= x^2 + (-z-\bar{z})x + z\bar{z} \\&= x^2 + (-z-\bar{z})x + |z|^2 \\&= x^2 - 2\operatorname{Re}(z)x + |z|^2\end{aligned}$$

$\bar{z}$ è coefficiente reale; se $z = \alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$

allora

$$\begin{aligned}(x-z)(x-\bar{z}) &= x^2 - 2\alpha x + (\alpha^2 + \beta^2) \\&= (x-\alpha)^2 + \beta^2, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Esempio 33.7.1

$$\int \frac{3x+9}{x^2-6x} dx = 3 \int \frac{x+3}{x^2-6x} dx$$

1) $Q(x) = x^2 - 6x = x(x-6)$

$$n=2, \quad x_1=0, \quad x_2=6$$

$$m_1 = 1 = m_2$$

Q non ha radici complesse non reali

2)

$$\frac{x+3}{x^2-6x} = \frac{R_{11}}{x} + \frac{R_{21}}{x-6} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-6}$$

Come trovare a e b ? Abbacchio

$$\frac{x+3}{x(x-6)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+3 = a(x-6) + bx = x(a+b) - 6a$$

$\forall x \in \text{dominio di integrazione}$
 uso principio di identità dei polinomi, e trovo:

$$\begin{cases} 1 = a+b \\ 3 = -6a \end{cases} \quad \text{Sistema lineare } 2 \times 2$$

$$a = -\frac{1}{2}, \quad b = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{x+3}{x^2-6x} = -\frac{1}{2x} + \frac{3}{2(x-6)}$$

$$\int \frac{x+3}{x^2-6x} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{x} dx + \frac{3}{2} \int \frac{1}{x-6} dx$$

$$= -\frac{1}{2} \ln|x| + \frac{3}{2} \ln|x-6| + c$$

Esercizio

$$\int \frac{1}{x^3-1} dx$$

$$P(x) = 1, \quad Q(x) = x^3 - 1$$

$$1) \quad x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$$

$$r=1, \quad x_1=1, \quad m_1=1$$

$$Z_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \bar{Z}_1 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$c=1, \quad m_1=1$

$$Z_1 \bar{Z}_1 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1, \text{ si}$$

$$Z_1 + \bar{Z}_1 = -1, \text{ si}$$

$$2) \quad \frac{1}{x^3-1} = \frac{R_{11}}{x-1} + \frac{C_{11}x + D_{11}}{\left(x - \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)\left(x - \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)}$$

$$= \frac{R_{11}}{x-1} + \frac{C_{11}x + D_{11}}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$$

$$\alpha = -\frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{x^3-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$$

Come trovare a, b, c ?

$$1 = a\left(\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right) + (bx+c)(x-1)$$

Uso principio di identità dei polinomi,

$$\begin{cases} 0 = a+b \\ 0 = a-b+c \\ 1 = a-c \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} a &= -b = \frac{1}{3} \\ c &= 2b = -2a = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{x^3-1} dx = \int \frac{1}{3(x-1)} dx + \int \frac{-\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dx$$

DSS 33.10.1

Si ha dalla 1a G. in forma reale

$$\frac{P}{Q} = \frac{R_{11}}{(x-x_1)} + \dots + \frac{R_{1m_1}}{(x-x_1)^{m_1}} +$$

Radici
reali

$$\frac{R_{r1}}{(x-x_r)} + \dots + \frac{R_{rm_r}}{(x-x_r)^{m_r}} +$$

radici
complesse
non reali

$$+ \frac{C_{11}x + D_{11}}{(x-\alpha_1)^2 + \beta_1^2} + \dots + \frac{C_{1\mu_1}x + D_{1\mu_1}}{[(x-\alpha_1)^2 + \beta_1^2]^{\mu_1}} +$$

$$+ \frac{C_{c1}x + D_{c1}}{(x-\alpha_c)^2 + \beta_c^2} + \dots + \frac{C_{c\mu_c}x + D_{c\mu_c}}{[(x-\alpha_c)^2 + \beta_c^2]^{\mu_c}}$$

dove $Z_1 = \alpha_1 x + i\beta_1$

$Z_c = \alpha_c x + i\beta_c$

ES 33.10.1 (1a Cera):

$$\int \frac{1}{(x^3-1)^2} dx$$

$$\int \frac{x^3}{x^2-5x+6} dx$$

$$\frac{P}{Q} = \dots + R$$

Come dimostravi la prima a pag 10, così il

passo 2 dell'algoritmo su il calcolo di $\int \frac{P}{Q} dx$

Questa è una richiesta applicativa di 2 lemmi:

Lema 33.11.1 (riguardo il "blocco reale"

della lunga prima a pag 10).

Siano P, Q polinomi a coefficienti reali,

senza radici comuni, $\text{grado}(P) < \text{grado}(Q)$,

sia $\bar{x} \in \mathbb{R}$ radice di Q di mult. $\bar{m} \in \mathbb{N}$

Allora $\exists! C^* \in \mathbb{R}$: e unici polinomi A, B a coeff. reali

$$\frac{P}{Q} = \frac{C^*}{(x - \bar{x})^{\bar{m}}} + \frac{A}{B}$$

con $\text{grado}(A) < \text{grado}(B)$

$\text{grado}(B) < \text{grado}(Q)$

Dim Data una costante $C \in \mathbb{R}$ (che

dimostrerò alla fine che posso trovare in modo
unico) considero

$$\frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{C}{(x - \bar{x})^{\bar{m}}}$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{C}{(x-\bar{x})^m} \quad (33.12.1)$$

Per ipotesi ho

$$Q(x) = (x-\bar{x})^{\bar{m}} \tilde{Q}(x), \quad \tilde{Q}(\bar{x}) \neq 0 \quad (33.12.2)$$

$\tilde{Q}$ pol. a coeff. reali
 $\text{grado}(\tilde{Q}) < \text{grado}(Q)$

$\Downarrow$

$$(33.12.1) = \frac{P(x)}{(x-\bar{x})^{\bar{m}} \tilde{Q}(x)} = \frac{C}{(x-\bar{x})^{\bar{m}}}$$

$$= \frac{P(x) - C \tilde{Q}(x)}{(x-\bar{x})^{\bar{m}} \tilde{Q}(x)}$$

$$\stackrel{?}{=} \frac{A}{B}$$

e voglio colore di grado, scegliendo C

in modo opportuno. Ho bisogno di

$$P(x) - C \tilde{Q}(x) \quad \text{e} \quad (x-\bar{x})^{\bar{m}} \tilde{Q}(x)$$

abbiano una radice comune.

P non ha radici comuni con Q per ipotesi, dunque dalla (33.12.1) P non ha radici

comuni con $\tilde{Q}$. L'unica cosa da sapere è vedere

se è possibile scegliere la costante $C \in \mathbb{R}$ in modo che $\bar{x}$ diventi radice di $P - C \tilde{Q}$.

$$\exists c \in \mathbb{R} : P(\bar{x}) - c \tilde{Q}(\bar{x}) = 0 ?$$

$$\text{Se mi moltiplico } c^* = \frac{P(\bar{x})}{\tilde{Q}(\bar{x})} \in \mathbb{R} \quad (\text{ricordando che}$$

$$\text{da (33.13.2)} \Rightarrow \tilde{Q}(\bar{x}) \neq 0).$$

$$\text{Dividendo } P(x) - c^* \tilde{Q}(x) \text{ e } (x - \bar{x})^{\mu} \tilde{Q}(x)$$

$$\text{per } (x - \bar{x}), \text{ dopo la t.h.}$$

□

Lemma 33.13.1 (riguarda il "blocco complesso")

della lingua parlata a pg 10)

Siano P, Q polinomi a coefficienti reali,

nessuna radice comune, $\text{grado}(P) < \text{grado}(Q)$.

Sia $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ radice di Q di molteplicità

$$\mu \in \mathbb{N}, \quad z = \alpha + i\beta, \quad \beta \neq 0.$$

Allora $\exists ! c^* \in \mathbb{R}, \exists ! d^* \in \mathbb{R}, \exists$ ^{a coeff. real} $\text{unico polinomi } A, B$.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{c^* x + d^*}{[(x - \alpha)^2 + \beta^2]^{\mu}} + \frac{A(x)}{B(x)},$$

$$\text{grado}(A) < \text{grado}(B), \quad \text{grado}(B) < \text{grado}(Q).$$

Dim. Dato due costanti reali c, d (che dimostrerò alla fine di poter trovare un modo unico) calcoleremo

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{cx+d}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n} \quad (33.14.1)$$

Dato che z è radice, per ipotesi di Q , di molteplicità μ ,

$$Q(z) = 0,$$

$$Q(x) = (x-z)^\mu (x-\bar{z})^\mu \tilde{Q}(x), \quad \tilde{Q}(z) \neq 0, \quad \tilde{Q}(\bar{z}) \neq 0$$

$$Q(x) = [(x-\alpha)^2 + \beta^2]^\mu \tilde{Q}(x).$$

Sostituendo nella (33.14.1) ho

$$\begin{aligned} (33.14.1) &= \frac{P(x)}{[(x-\alpha)^2 + \beta^2]^\mu \tilde{Q}(x)} = \frac{cx+d}{[(x-\alpha)^2 + \beta^2]} \\ &= \frac{P(x) - (cx+d)\tilde{Q}(x)}{[(x-\alpha)^2 + \beta^2]^\mu \cdot \tilde{Q}(x)} \end{aligned}$$

Come prima, le voglio colore di grado zero vedere le posso scegliere $c, d \in \mathbb{R}$ in modo che

$$\begin{cases} P(z) - (cz+d)\tilde{Q}(z) = 0 \\ P(\bar{z}) - (c\bar{z}+d)\tilde{Q}(\bar{z}) = 0 \end{cases}$$

Ho il seguente sistema di 2 equazioni
nelle due incognite $c, d \in \mathbb{K}$:

$$\begin{cases} P(\alpha + i\beta) - (c(\alpha + i\beta) + d) \tilde{Q}(\alpha + i\beta) = 0 \\ P(\alpha - i\beta) - (c(\alpha - i\beta) + d) \tilde{Q}(\alpha - i\beta) = 0 \end{cases}$$

Nota che $\tilde{Q}(z) \neq 0$, $\tilde{Q}(\bar{z}) \neq 0$, lo

$$\begin{cases} \frac{P(\alpha + i\beta)}{\tilde{Q}(\alpha + i\beta)} = c(\alpha + i\beta) + d \\ \frac{P(\alpha - i\beta)}{\tilde{Q}(\alpha - i\beta)} = c(\alpha - i\beta) + d \end{cases} \quad (33.15.1)$$

prendendo la diff. delle 2 eq sopra

$$c^* := \frac{1}{2i\beta} \left[\frac{P(\alpha + i\beta)}{\tilde{Q}(\alpha + i\beta)} - \frac{P(\alpha - i\beta)}{\tilde{Q}(\alpha - i\beta)} \right]$$

sommando le 2 eq. nelle (33.15.1) e ricavando
metto c^* al posto di c

$$d^* := \frac{1}{2} \left[\frac{P(\alpha + i\beta)}{\tilde{Q}(\alpha + i\beta)} + \frac{P(\alpha - i\beta)}{\tilde{Q}(\alpha - i\beta)} \right] - c^* \alpha$$

□