

Lezione 32 10/12/2019

9-11

Sotto tutte le ipotesi necessarie di f

Oss 32.1.1.

$$\int_a^b f'(t) dt = f(b) - f(a)$$

Teo 32.1.1 (Integrazione per parti)

Siano $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $f, g \in \mathcal{C}^1([a, b])$. Allora

$$\int_a^b f'g dt = - \int_a^b fg' dt + f(b)g(b) - f(a)g(a)$$

Dim $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + fg'(x) \quad \forall x \in [a, b]$

$$\Rightarrow \int_a^b (fg)' dt = \int_a^b f'g dt + \int_a^b fg' dt$$

oss 32.1.1 //

$$f(b)g(b) - f(a)g(a)$$

□

Notazione : $[fg]_a^b = f(b)g(b) - f(a)g(a) \quad (32.1.1)$

« Se devo integrare il prodotto $f' \cdot g$

il risultato è = l'integrale di fg' +

l'altro al bordo (32.1.1) »

Quando in An. II vedrete il teorema della derivata, noterete che Teo 32.1.1 ne è la versione unidimensionale »

Abhauw vrt (Th. 31.3.2)

$$\frac{d}{dx} \int_{x_0}^x f(t) dt = f(x) \quad (32.2.0)$$

Coa mude u deve calcular

$$\frac{d}{dx} \int_{x_0}^{a(x)} f(t) dt$$

e pr u generale $\frac{d}{dx} \int_{a(x)}^{b(x)} f(t) dt$

Prop 32.2.1 Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^0([a, b])$
 $a: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{C}^1([a, b])$, $x_0 \in [a, b]$. Allora

$$\frac{d}{dx} \int_{x_0}^{a(x)} f(t) dt = f(a(x)) a'(x) \quad \forall x \in [a, b] \quad (32.2.1)$$

Def Definito $F(x) := \int_{x_0}^x f(t) dt$. Allora

$$F(a(x)) = \int_{x_0}^{a(x)} f(t) dt.$$

Per l'ultima la (32.2.1) deve calcolare $\frac{d}{dx} F(a(x))$

$$\frac{d}{dx} F(a(x)) = F'(a(x)) a'(x) = f(a(x)) a'(x)$$

(32.2.0)

3

Mostiamo che se $a(x) = x$ allora la

(32.2.1) toma a meno uguale a (32.2.0).

Per' in generale, se $a, b \in E^1([a, b])$

$$\frac{d}{dx} \int_{a(x)}^{b(x)} f(t) dt = ?$$

Poniamo $F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt$. Allora

$$F(b(x)) - F(a(x)) =$$

$$= \int_{x_0}^{b(x)} f(t) dt - \int_{x_0}^{a(x)} f(t) dt = \int_{a(x)}^{b(x)} f(t) dt$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} \int_{a(x)}^{b(x)} f(t) dt = \frac{d}{dx} (F(b(x)) - F(a(x)))$$

$$= F'(b(x)) b'(x) - F'(a(x)) a'(x)$$

$$= f(b(x)) b'(x) - f(a(x)) a'(x)$$

Questa è una generalizzazione della (32.2.1).

Es 32.4.1 (per Corsi) Studiare la

funzione $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \int_0^x \sqrt{\frac{t}{1-t}} dt$$

oss non è richiesto dal testo il calcolo esplicito dell'integrale.

C'è una difficoltà, vedi sotto

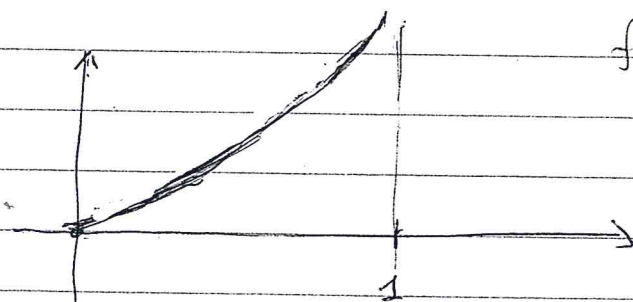
$$0 \leq g(t) = \sqrt{\frac{t}{1-t}}, \quad \forall t \in [0,1)$$

non ho $g \in \mathcal{C}([0,1])$, ho che $g \in \mathcal{C}([0,1))$

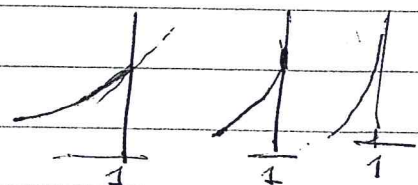
f dunque non sarà $\mathcal{C}^1([0,1])$. Però $0 \leq f$ è strettamente crescente, e

$\forall f \in \mathcal{C}^\infty([0,1))$, e ho $f(0) = 0$,

$$f'(x) = \sqrt{\frac{x}{1-x}} \quad \forall x \in (0,1)$$



$$f''(x) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x}{1-x}}$$



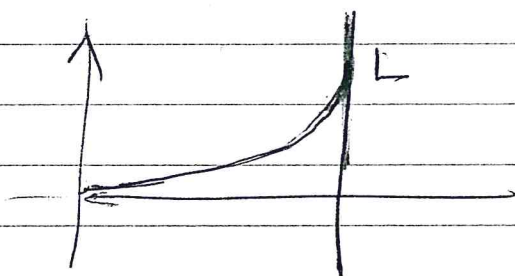
0 è dunque l'unico minimo assoluto, $f' > 0$ in $[0,1)$; non ci sono altri punti stazionari. f è strettamente crescente

Poiché f è crescente ≥ 0

$$\exists L = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \in (0, +\infty]$$

Il problema è se tale limite è finito o meno.

Vedere che



$$0 < L < +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1} f'(x) = +\infty$$

↑
facile.

Abbiamo visto durante il corso che i risultati che coinvolgono l'operazione di composizione

tra due funzioni sono tra i più deliziosi.

Abbiamo anche, in questa direzione:

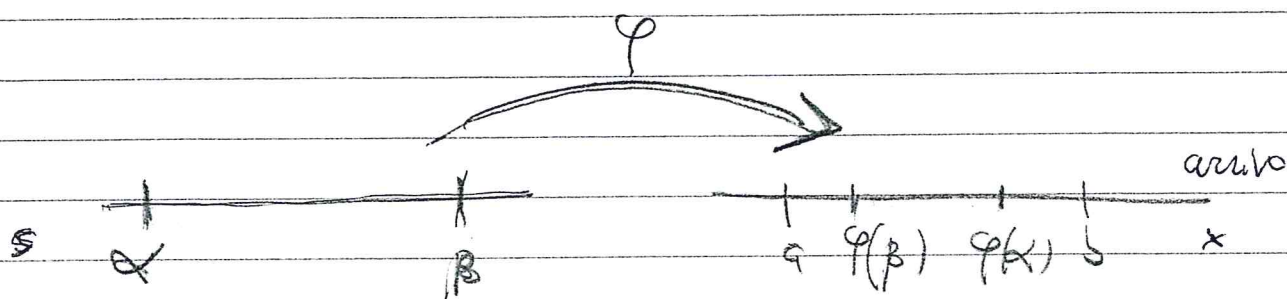
Teo 32.5.1 (calcolo di variabili negli
integrili multidimensionali ORIENTATI)

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}([a, b])$

Sia $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ derivabile

Algebra

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(s)) \varphi'(s) ds \quad (32.5.1)$$



Def $F(x) := \int_a^x f(t) dt$; F, f «vivendo in arabo»

consider $F(\varphi(s)) \quad \forall s \in [\alpha, \beta]$

φ è derivabile, $F \in \mathcal{E}^1 \Rightarrow F \circ \varphi$ è derivabile

e si ha

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} F(\varphi(s)) &= F'(\varphi(s)) \varphi'(s) \quad \forall s \in [\alpha, \beta] \\ &= f(\varphi(s)) \varphi'(s) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d}{ds} F(\varphi(s)) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(s)) \varphi'(s) ds$$

$$\begin{aligned} &\parallel \\ F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) &= \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t) dt \end{aligned}$$

□

Corollario 32.7.1

Se inoltre

$$\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$$

è invertibile, allora

$$\int_a^b f(\varphi(s)) \varphi'(s) ds = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(t) dt$$

Dim PER CASA (segue immediatamente

dalla (32.6.1)).

ES 32.7.1 Calcola $\int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx$

e più in generale calcola, dato n, $\int \frac{1}{(1+x^2)^n} dx$

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^n} dx$$

Abbiamo visto il caso $n=1$.

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = \begin{cases} \text{trucco} \\ \text{integrare la parte} \\ \text{costante del numeratore} \end{cases}$$

$$\stackrel{\uparrow}{\text{trucco}} \int \frac{1+x^2 - x^2}{(1+x^2)^2} dx =$$

$$= \int \frac{1+x^2}{(1+x^2)^2} dx - \int \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx$$

$$= \int \frac{1}{1+x^2} dx - \int \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx$$

$$= \arctan x + c - \int \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx$$

Concentriamoci su

$$\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx = \int \frac{x}{(1+x^2)^2} x dx$$

- Vedo $\frac{x}{(1+x^2)^2} = \text{derivata di qualcosa}$
 $= f'(x) ; \text{ chi } \bar{=} f ?$

$$x = g(x), \quad g'(x) = 1$$

$$f(x) = -\frac{1}{2} \frac{1}{1+x^2} \quad (\text{a meno di costanti})$$

Dal teo 32.1.1 (integrazione per parti) ho a meno di costanti

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx &= - \int f(x) g'(x) dx = -\frac{1}{2} \frac{x}{1+x^2} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+x^2} dx - \frac{1}{2} \frac{x}{1+x^2} \end{aligned}$$

ES (caso)

$$\int_1^3 \frac{e^x}{1+e^x} dx$$

Supplemento: Cambio di variabile

$$\int \frac{1}{2+4x^2} dx \quad (\text{lezione 31})$$

$$\int x^3 \tan x \, dx$$

Supplemento: integrare per parti + volte

$$\int \frac{4^x + 1}{2^x + 1} dx$$

Supplemento: Cambio di variabile

Calcolo di $\int \frac{1}{(1+x^2)^n} dx =: I_n$

Seguiamo l'idea usata nel caso $n=2$:

$$I_n = \int \frac{1+x^2 - x^2}{(1+x^2)^n} dx =$$

$$= \int \frac{1+x^2}{(1+x^2)^n} dx - \int \frac{x^2}{(1+x^2)^n} dx \Rightarrow$$

$$I_n = I_{n-1} - \int \frac{x^2}{(1+x^2)^n} dx$$

$$= I_{n-1} - \int \underbrace{\frac{x}{(1+x^2)^n}}_{f'(x)} \underbrace{x}_{g(x)} dx$$

$$= I_{n-1} + \int f g'(x) dx + [\quad]$$

$$f'(x) = \frac{-1}{2(n-1)} \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}} \quad (\text{a memo d'Gst.})$$

$$\left(\text{für } n=2 \quad f(x) = -\frac{1}{2} \frac{1}{1+x^2} \right)$$

$$= I_{n-1} - \frac{1}{2(n-1)} \int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}} dx + [\dots]$$

$$= I_{n-1} - \frac{1}{2(n-1)} I_{n-1} + \frac{1}{2(1-n)} \frac{x}{(1+x^2)^{n-1}}$$

$$= I_{n-1} \left(1 - \frac{1}{2(n-1)} \right) + \frac{1}{2(1-n)} \frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} \Rightarrow$$

$$I_n = \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1} + \frac{1}{2(1-n)} \frac{x}{(1+x^2)^{n-1}}$$