

Lezione 31

6/12/19

11-14

Def 31.1.1.

Sia $f \in \mathcal{C}([a, b])$. Una

funzione $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ si dice una

primitiva di f sull'intervallo $[a, b]$ se

$$F \in \mathcal{C}'([a, b])$$

(31.1.1)

$$F' = f \quad \text{su } [a, b]$$

oss 31.1.1

In generale, se una primitiva di f

esiste, non è unica. Infatti, se F è

una primitiva di f , e se $C \in \mathbb{R}$, allora

anche $F+C$ è una primitiva di f .

Lemma 31.1.1

Se F è una primitiva

di f su $[a, b]$, e G è una primitiva

di f su $[a, b]$, allora « F e G differiscono

per una costante», cioè $\exists C \in \mathbb{R}$:

$$F(x) = G(x) + C \quad \forall x \in [a, b]$$

oss 31.1.2

La famiglia di tutte le primitive

di f su $[a, b]$ è data da una primitva

di f + una costante, al variare della costante.

Dim (Lemma): siano F, G due primitive

di f in $[a, b]$, consideriamo

$$H := F - G$$

Allora $H \in \mathcal{C}^1([a, b])$, e si ha

$$H' = (F - G)' = F' - G' = f - f = 0$$

Quindi H ha derivata identicamente nulla

in $[a, b]$. Ne segue che $\exists c \in \mathbb{R}$

$$H(x) = c \quad \forall x \in [a, b]$$

□

Come trovare una primitiva di f è il problema
del calcolo degli integrali.

Es 31.2.1 Il Lemma 3.1.1.1 è falso

se invece di $[a, b]$, mettiamo $[a, b] \cup [c, d]$

con $b < c$. Possiamo infatti scegliere, se F è

una primitiva* di $f \in \mathcal{C}([a, b] \cup [c, d])$ in $[a, b] \cup [c, d]$,
se definite

$$G = \begin{cases} F + \underline{c_1} & \text{su } [a, b] \\ F + \underline{c_2} & \text{su } [c, d] \end{cases}$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, allora G è ancora una primitiva
di f in $[a, b] \cup [c, d]$.

* Così si considera $[a, b] \cup [c, d]$ al posto di $[a, b]$

Teo 31.3.2. Sia $f \in \mathcal{E}([a, b])$. Definiamo

$$(31.3.1) \quad F(x) := \int_a^x f(t) dt \quad \forall x \in [a, b]$$

(vedi la Def. a pag 6 lezione 30)

Allora F è una primitiva di f in $[a, b]$.
grazie al Lemma 31.1.1,

• Dunque, la famiglia delle primitive di f in $[a, b]$ è data dalla F nella (31.1.1) + una costante ^{reale} qualunque.

Dm Dato $x \in [a, b]$, $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, considero

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h}, \quad \text{ben definito}$$

è naturalmente $x+h \in [a, b]$

$$= \frac{\int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt}{h}$$

(31.3.2)

Sappiamo, dalla additività dell'integrale, che

$$\int_a^{x+h} f(t) dt = \int_a^x f(t) dt + \int_x^{x+h} f(t) dt$$

(vedi formula nel centro di pag 6 lezione 30)

Dunque, dalla (31.3.2) segue

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{\int_x^{x+h} f(t) dt}{h} \quad (31.4.0)$$

Supponiamo $h > 0$ ($x \in [a, b)$).

Mostriamo che

$$-\infty < c := \min_{[x, x+h]} f \leq f(t) \leq \max_{[x, x+h]} f =: C < +\infty$$

(il max/min) essendo $f \in \mathcal{C}([a, b])$, $\subset [x, x+h]$ compatto, Teo di Weierstrass 20.4.1

Segue allora (casi) $x+h$

$$c(x+h-x) = ch \leq \int_x^{x+h} f(t) dt \leq C(x+h-x) = Ch$$

Dividendo per $h > 0$ deduco

$$(31.4.1) \quad c \leq \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt \leq C$$

Dunque la (31.4.1) mi dice che il numero

$$\frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt$$

è compreso tra il valore minimo di f su $[x, x+h]$

e il valore massimo di f su $[x, x+h]$.

• E prendo $f \in \mathcal{C}([a, b])$ (suggero $f \in \mathcal{C}([x, x+h])$)

dal teo dei valori intermedi 20.9.1,

$$\exists \xi \in [x, x+h]: \quad f(\xi) \stackrel{(31.5.1)}{=} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt$$

Facciamo tendere $h \rightarrow 0^+$ nella (31.5.1):

necessariamente $\xi \rightarrow x$ per $h \rightarrow 0^+$

ed essendo f continua in $[a, b]$ è dunque

continua in x e perciò $f(\xi) \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} f(x) \in \mathbb{R}$

Ne deduco

$$\exists \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt \in \mathbb{R}$$

Dalla (31.6.0) segue allora

$$\exists \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x) \in \mathbb{R}$$

Nello stesso modo si mostra

$$\exists \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x) \in \mathbb{R} \quad x \in (a, b]$$

Del lemma 18.13.1

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x) \in \mathbb{R} \quad \therefore$$

Dalla def. di derivabile, ne deduco che
 F è derivabile in x

Questo vale $\forall x \in [a, b]$, e dunque

F è derivabile in $[a, b]$,

(e più F è continua in $[a, b]$), e

$$(31.6.1) \quad F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b].$$

Resta da dimostrare che $F' \in \mathcal{C}([a, b])$. *

Ma per ipotesi f è continua in $[a, b]$, e dunque

Dalla (31.6.1) F' è continua (cioè $F \in \mathcal{C}^1([a, b])$)

oss 31.6.0: $F(a) = 0$ □

oss 31.6.1. Ho fatto una scelta arbitraria
nell'enunciato del teorema integrando «a
partire da a ». Se avessi scelto $x_0 \in [a, b]$
invece di a cosa succederebbe della tesi?

* Ricordare che esistono funzioni derivabili in $[a, b]$
ma non $\mathcal{C}^1([a, b])$.

Esempio 31.7.1

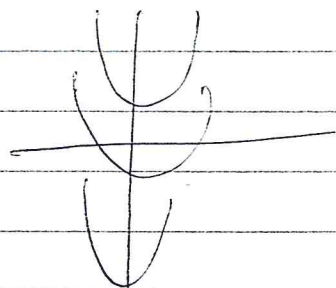
$$f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = x$$

$$F(x) = \int_{-1}^x t \, dt = ?$$

La famiglia delle primitive di f su $[-1, 1]$
è data da

$$\left\{ \frac{x^2}{2} + c : c \in \mathbb{R} \right\}$$



So che dunque F è una di queste, cioè

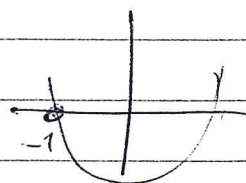
$$\exists \bar{c} \in \mathbb{R} : F(x) = \frac{x^2}{2} + \bar{c} \quad \text{Chi è } \bar{c}?$$

So che $F(-1) = 0$. Dunque risolviamo in $\bar{c}$:

$$\frac{(-1)^2}{2} + \bar{c} = 0 \Rightarrow \bar{c} = -\frac{1}{2}$$

Perciò

$$F(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}$$



Del teo, ho trovato la unica primitiva F di

$$\begin{cases} F' = f \\ F(-1) = 0 \end{cases}$$

es 31.8.1

è aversi scelto al posto di

a un qualunque punto $x_0 \in [a, b]$,

$$\int_{x_0}^x f(t) dt,$$

questo è ancora una primitiva, anzi è quella primitiva che vale 0 in x_0 .

Nota Se scelto $x = b$ nella (31.3.1) ho

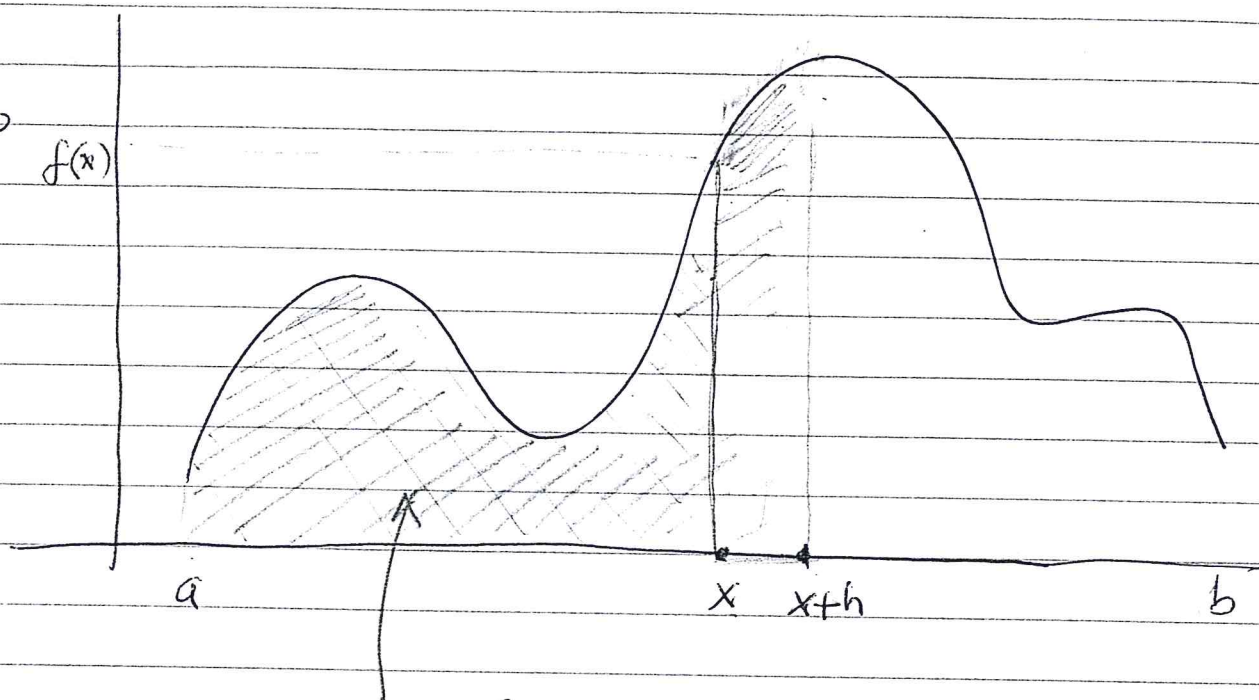
evidentemente

$$F(b) = \int_a^b f(t) dt$$

$$F(b) - F(a)$$

Notare $\int f(t) dt$ indica a volte la famiglia delle primitive di f .

In fine, vediamo l'idea geometrica che sta sotto alla dim. del teorema.

$h > 0$ $f(x)$ 

$$\text{area}(///) = F(x+h)$$

$$\text{area}(\\) = F(x)$$

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{\text{area}(\boxed{\text{shaded}})}{h} \quad (31.9.1)$$

È ragionevole pensare che, nonostante che il

"effetto" di  "sia stato", se "f

è ragionevole", quando faccio il limite di

(31.9.1) per $h \rightarrow 0^+$, resti come risultato la

altezza verde che è $= f(x)$.

Calcolo di integrali di funzioni continue su

intervalli chiusi e limitati (in realtà si

potrebbe integrare le funzioni monotone decrescenti
perché

✓ in un intervallo, le funzioni con pochi punti

di discontinuità in un intervallo chiuso e limitato,

ecc. ecc.).

$$\int_0^x \cos t \, dt = \sin x$$

$$\int_0^x \sin t \, dt = -\cos x + 1$$

le famiglie delle primitive di $\sin x$ e

$$\{-\cos x + c : c \in \mathbb{R}\}$$

inoltre:

$$\forall \int x^\alpha \, dx = \left\{ \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + c : c \in \mathbb{R} \right\} \quad (\text{su } \mathbb{R}^+)$$

$$= \left\{ \log x + c : c \in \mathbb{R} \right\} \quad (\text{su } \mathbb{R}^+)$$

se $\alpha = -1$

(stare attenti: per certi α
e anche $x=0$, e per $\alpha=-1$ anche $x \leq 0$)

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \{ \arctan x + c : c \in \mathbb{R} \} \quad (31.11.1)$$

$$\int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int \frac{x^2 - 1 + 1}{1+x^2} dx$$

$$= \int \left(\frac{x^2 - 1}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^2} \right) dx$$

$$\stackrel{\uparrow}{=} \int \frac{x^2 + 1}{1+x^2} dx + \int \frac{-1}{1+x^2} dx$$

si usa ② pg 4 lezione 30 (difficile)

$$= \int 1 dx - \int \frac{1}{1+x^2} dx$$

generalizzazione della ③

pg 4 lezione 30 per c anche < 0

$$= \{ x - \arctan x + c : c \in \mathbb{R} \}$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx = \left\{ \frac{1}{2} \log(1+x^2) + c : c \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \{ \log(f(x)) + c : c \in \mathbb{R} \}$$

$\uparrow$ $c \in \mathbb{R}$ $c \geq 0$ o $c < 0$

"Variabili sul tema" dell'integrale (31.11.1)

$$\int \frac{1}{d + x^2} dx \quad d > 0$$

$$\int \frac{1}{d(1 + \frac{x^2}{d})} dx = \frac{1}{d} \int \frac{1}{1 + \frac{x^2}{d}} dx$$

$$= \frac{1}{d} \int \frac{1}{1 + (\frac{x}{\sqrt{d}})^2} dx = \left\{ \frac{1}{\sqrt{d}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{d}}\right) + c : c \in \mathbb{R} \right\}$$

$$a \neq 0 \quad \int \frac{1}{a \cdot x^2 + bx + c} dx = \frac{1}{a} \int \frac{1}{x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}} dx$$

$$\alpha = b/a, \quad \beta = c/a \quad = \frac{1}{a} \int \frac{1}{x^2 + \alpha x + \beta} dx$$

pensando di $d + x^2 = (\sqrt{d})^2 + x^2$, per

cerca di scrivere

$$x^2 + \alpha x + \beta \text{ come somma di 2 quadrati}$$

$$\left(x + \frac{\alpha}{2}\right)^2 + \beta - \frac{\alpha^2}{4} = \left(x + \frac{\alpha}{2}\right)^2 + (\sqrt{d})^2,$$

suffice

$$\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} > 0 \quad ; \quad d := \beta - \frac{\alpha^2}{4}$$

" $\frac{4ac - b^2}{4a^2}$

H brekke da po

$$\int \frac{1}{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + (\sqrt{d})^2} dx$$

Dobriam scopire come fare a integrare

$$\int \frac{1}{(x+p)^2 + q^2} dx$$