

Abbiamo visto come definire la lunghezza di un qualunque sottoinsieme di  $\mathbb{R}$ ; ci sono 2 modi,  $\hat{L}$  e  $\tilde{L}$  (che in certi casi possono dare risultati  $\neq$ ).

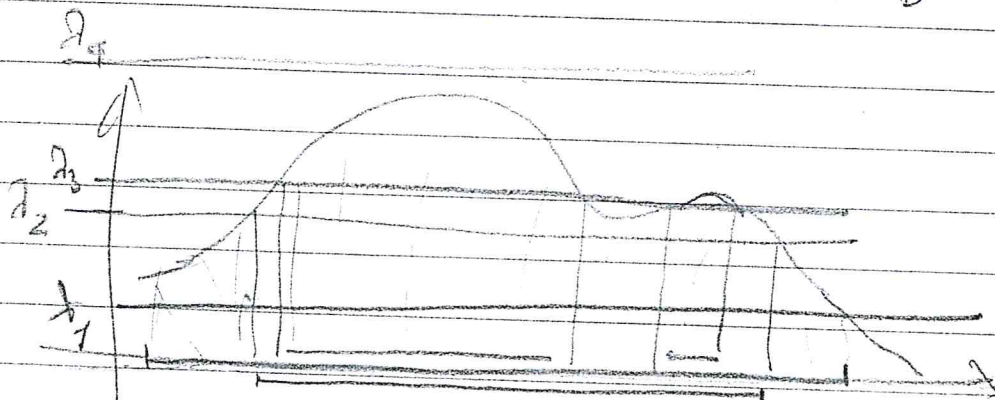
Poniamo  $\alpha = \hat{L}$  oppure  $\tilde{L}$ .

Sia  $f: D = \text{dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow [0, +\infty)$

« L'idea è di pensare  $f$  come un assemblaggio di insiemi, e usare il fatto che di questi insiemi so misurare la lunghezza »

Dato  $\lambda \geq 0$ , posso considerare  $\{f > \lambda\}$

$= \{x \in D : f(x) > \lambda\}$  (che può essere  $\emptyset$ )



$\lambda$  è dato livello,  $\{f > \lambda\}$  è dato sopralivello  $\lambda$  di  $f$

Def 30.2.1

$$k \leq \lambda_1 < \lambda_2 < +\infty$$

$$\{f > \lambda_1\} \supseteq \{f > \lambda_2\}$$

Dim: Sia  $x \in \{f > \lambda_2\}$ , allora  $f(x) > \lambda_2$

Essendo  $\lambda_2 > \lambda_1$ ,  $f(x) > \lambda_1 \Rightarrow x \in \{f > \lambda_1\}$

Def (subintegrale di  $f$ ) 30.2.1 Sia

$0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n$  una famiglia finita

di livelli,  $\Lambda = \{\lambda_0, \dots, \lambda_n\}$ . Definisco

$$\int_D f dx := \sum_{i=1}^n (\lambda_i - \lambda_{i-1}) \chi(\{f > \lambda_i\})$$

$D, \Lambda$

e lo chiamo subintegrale di  $f$

(DE GIORGI)

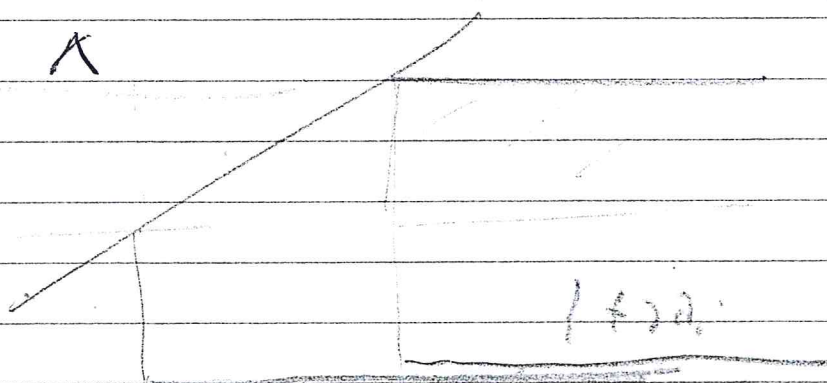
rispetto a  $\Lambda$

$\lambda_{i-1}$

$\lambda_0$

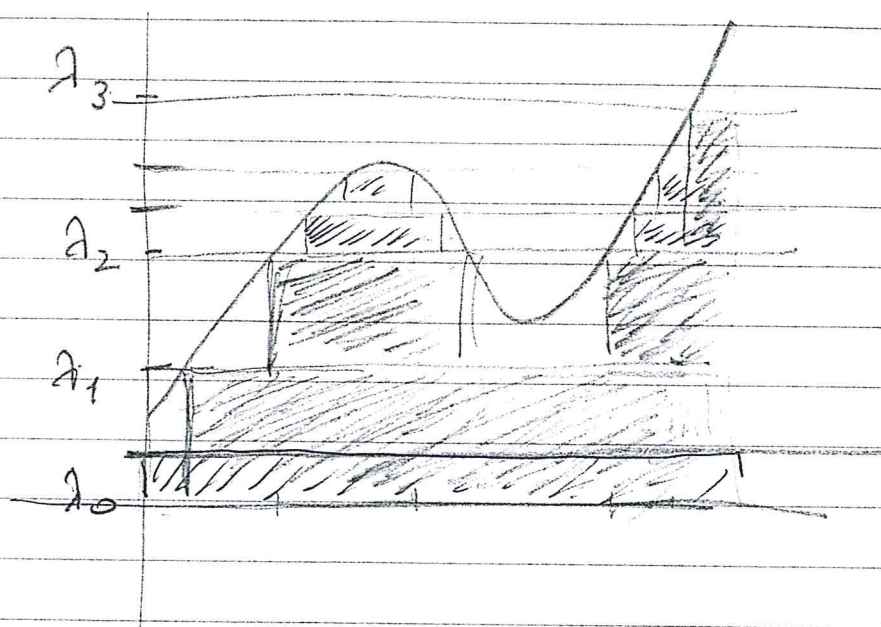
$\{f > \lambda_{i-1}\}$

$\{f > \lambda_i\}$





$n = 3$



Def 30.3.1 Sia  $f: D \rightarrow [0, +\infty)$

Sr definire l'integrale di  $f$  "in  $dx$ "

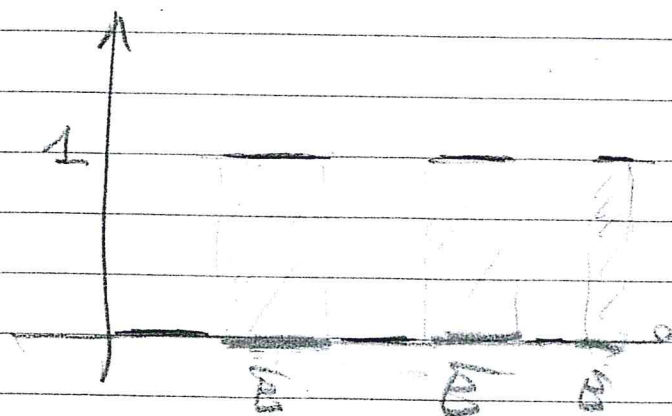
(su  $D$ )

$$\int_D f dx := \int_D f dx = \int_D f(x) dx$$

$$:= \sup \left\{ \int_D f dx : \Lambda \text{ famiglia finita di livelli} \right\}$$

Come prima un insieme una funzione:

$$E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow 1_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in E \\ 0 & \text{se } x \notin E \end{cases}$$

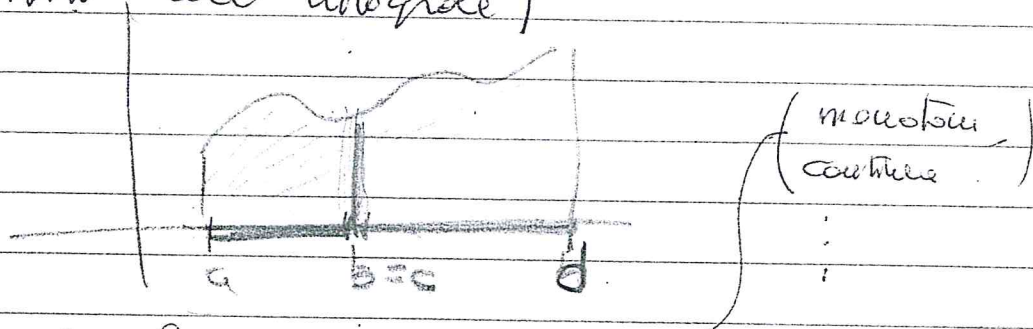


oss  $\alpha(E) = \int_D 1_E dx$

Fatti (sesta dimensazione): se  $b \leq c$

$$\textcircled{1} \int_{[a,b] \cup [c,d]} f dx = \int_{[a,b]} f dx + \int_{[c,d]} f dx$$

(additivit  dell' integrale)



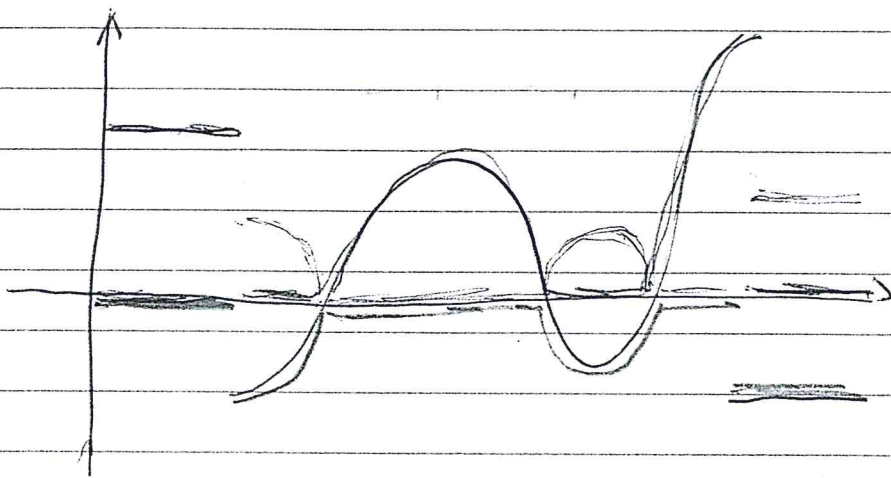
Per tutte le funzioni qui considerate,  $f_1, f_2 : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^+$

$$\textcircled{2} \int_{[a,b]} (f_1 + f_2) dx = \int_{[a,b]} f_1 dx + \int_{[a,b]} f_2 dx$$

(linearit  dell' integrale: difficile)

$$\textcircled{3} \text{ se } c \geq 0 \quad \int_{[a,b]} c f dx = c \int_{[a,b]} f dx$$

19  
 Come definire l'integrale di una funzione  
 non necessariamente  $\geq 0$ :



$$f^+ := \max(f, 0), \text{ cioè } f^+(x) = f(x)^+ \\ = \max(f(x), 0)$$

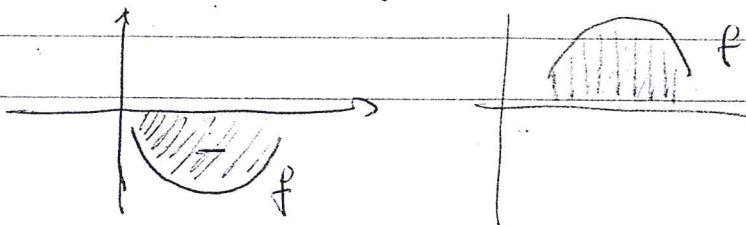
$$f^- := -\min(f, 0), \text{ cioè } f^-(x) = f(x)^- \\ = -\min(f(x), 0)$$

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x)$$

Def 30.5.1  $\int_D f \, d\alpha := \int_D f^+ \, d\alpha - \int_D f^- \, d\alpha$

Si ha:  $\int_D f^+ \, d\alpha < +\infty$  e  $\int_D f^- \, d\alpha < +\infty$

(lo si vuole dunque "area negativa")





Def Siano  $a, b \in \mathbb{I}$ ,  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$\int_a^b f dx := \begin{cases} \int_{[a,b]} f dx & \text{se } a \leq b \\ - \int_{[b,a]} f dx & \text{se } b \leq a \end{cases}$$

Con questa definizione vale ancora l'analogia

del fatto (1): se  $a, b, c \in I$

$$\int_a^b f dx = \int_a^c f dx + \int_c^b f dx$$



D'ora in poi ci interessano il calcolo  
esplicito degli integrali. Abbiamo per ora introdotto  
un teorema che chiamiamo teorema fondamentale  
del calcolo integrale.

