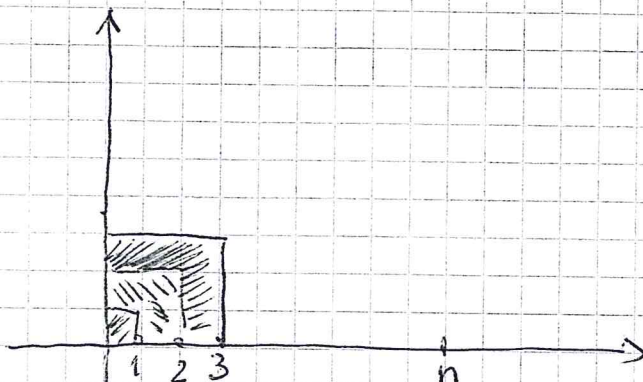


Lezione 2

25/9/19

1

Es 1.10.2



$$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$$

↑ ↑ ↗

area  area  area 

⇒ la somma dei primi n numeri dispari
 $= n^2 = \text{area (quadrato di lato } n)$

$$2k+1$$

$$k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

$$\sum_{k=0}^n (2k+1) = \sum_{k=0}^n 2k + \sum_{k=0}^n 1$$

$$= 2 \sum_{k=0}^n k + \sum_{k=0}^n 1 = 2 \frac{n(n+1)}{2} + n+1$$

$$= n^2 + n + n + 1$$

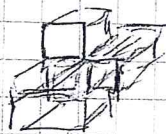
$$= n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

= somma dei primi $(n+1)$ numeri dispari.

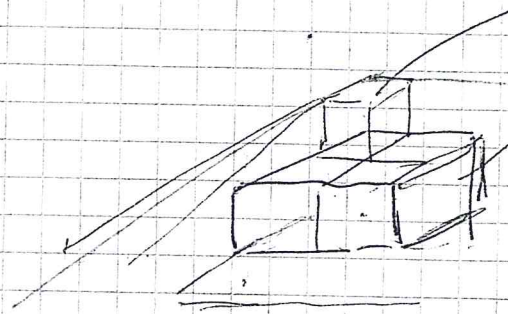
ES 1.10.3

$$S_{n,2} = \sum_{j=1}^n j^2 = 1 + 4 + 9 + \dots \quad n^2 = n^3 - ?$$

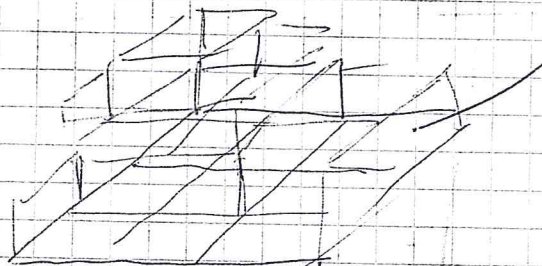
2



passo 1 cubo di lato 1



passo 2 parallelepipedo a base quadrato di lato 2, e altezza 1



passo 3 parallelepipedo a base quadrato di lato 3 e altezza 1

? $3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7 + \dots$

$$= \sum_{j=1}^n (j-1)(2j-1) \quad (\text{da ricorrenza})$$

$n=3; n=4 \quad 1+4+9+16 = 4^3 - (3+10+21)$

Si ha dunque ponendo $j-1 = k$

$$\begin{aligned} S_{n,2} &= n^3 - \sum_{k=0}^{n-1} k(2k+1) \\ &= n^3 - 2 \sum_{k=0}^{n-1} k^2 + \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} k}_{\text{NOTO}} \end{aligned}$$

Vedi pg 4

$$x = n$$

3

$$\begin{cases} x^3 - (x-1)^3 = x^3 - (x^3 - 1 - 3x^2 + 3x) = 3x^2 - 3x + 1 \\ (x-1)^3 - (x-2)^3 = 3(x-1)^2 - 3(x-1) + 1 \\ \vdots \\ 2^3 - 1^3 = 7 \\ 1^3 - 0^3 = 1 \end{cases}$$

$$4^3 - 3^3 = 3 \cdot 4^2 - 3 \cdot 4 + 1$$

$$3^3 - 2^3 = 3 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 + 1$$

$$2^3 - 1^3 = 3 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 1$$

$$1^3 - 0^3 = 3 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 1$$

$$\Rightarrow 4^3 = 3(4^2 + 3^2 + 2^2 + 1) - 3(4 + 3 + 2 + 1) + 1 + 1 + 1 + 1$$

Sommando tutte equazioni (con $x = n$)

$$n^3 = 3 \sum_{j=1}^n j^2 - 3 \sum_{j=1}^n j + n$$

$\Rightarrow$

$$\sum_{j=1}^n j^2 = \frac{n^3 + 3 \sum_{j=1}^n j - n}{3}$$

$$= \frac{n^3 + \frac{3n(n+1)}{2} - n}{3}$$

$$= \frac{2n^3 + 3n^2 + 2n}{6}$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n^2+n)(2n+1)}{6}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{j=1}^n j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} = \frac{2n^3 + 3n^2 + 2n}{6}$$

$$S_{n,2} = \sum_{j=1}^n j^2 = n^3 - 2 \sum_{j=1}^{n-1} j^2 + \sum_{j=1}^{n-1} j$$

$$S_{n,2} + 2 \sum_{j=1}^{n-1} j^2 = n^3 + \frac{n(n-1)}{2}$$

$$3S_{n,2} - 2n^2 = n^3 + \frac{n(n-1)}{2}$$

$$S_{n,2} = \frac{n^3 + 2n^2 + \frac{n(n-1)}{2}}{3} \quad \text{CASA}$$

controllore in casa

ES 1.10.4 (McGraw):

$$S_{n,3} = \sum_{j=1}^n j^3 \quad \text{usare: } (Cox \approx n)$$

$$\begin{cases} x^4 - (x-1)^4 = x^4 - (x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1) = 4x^3 - 6x^2 + 4x - 1 \\ (x-1)^4 - (x-2)^4 = (x-1)^4 - (x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16) = -x^4 + 8x^3 - 24x^2 + 32x - 15 \end{cases}$$

Sommando ho

$$n^4 = 4 \sum_{j=1}^n j^3 - 6 \sum_{j=1}^n j^2 + 4 \sum_{j=1}^n j - n \quad \text{CASA}$$

IN COGNITA

= Don't use $(1 + \dots + n)^2$

$$\left(\sum_{j=1}^n j \right)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

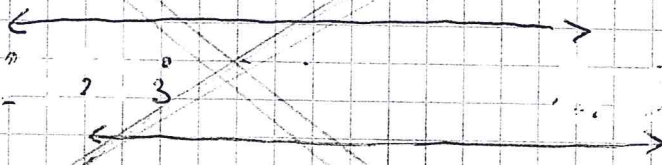
$$= \frac{n^2 (n+1)^2}{4}$$

ES 1.11.1

$$\sum_{k=2}^n (A_k - A_{k-1}) b_k = - \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_{k+1} - b_k)$$

$$+ A_n b_n - A_1 b_1$$

$$\sum_{k=2}^n (A_k - A_{k-1}) b_k = \sum_{k=2}^n A_k b_k - \sum_{k=2}^n A_{k-1} b_k$$



$$\sum_{k=2}^n (A_k - A_{k-1}) b_k = \sum_{k=2}^n A_k b_k - \sum_{k=2}^n A_{k-1} b_k$$

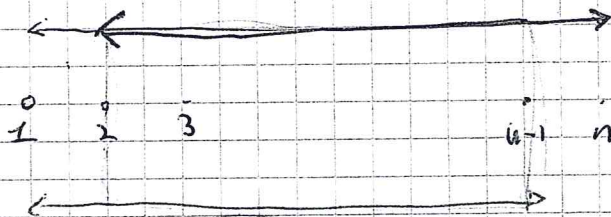
Per fare in modo che compare A_k
lo faccio in 2 paragrafi (anche se poter fare
in 1 sb):

$$\sum_{k=2}^n A_{k-1} b_k = \sum_{i=2}^n A_{i-1} b_i$$

$$\begin{aligned} i-1 &= k \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} A_k b_{k+1} \end{aligned}$$

Dunque

$$\sum_{k=2}^n (A_k - A_{k-1}) b_k = \sum_{k=2}^n A_k b_k - \sum_{k=1}^{n-1} A_k b_{k+1}$$



$$\begin{aligned} &= A_n b_n + \sum_{k=2}^{n-1} A_k b_k - \left(A_1 b_2 + \sum_{k=2}^{n-1} A_k b_{k+1} \right) \\ &= A_n b_n - A_1 b_2 + \sum_{k=2}^{n-1} (A_k b_k - A_k b_{k+1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= A_n b_n - A_1 b_2 + \sum_{k=2}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}) \\
 &= A_n b_n - A_1 b_2 - \sum_{k=2}^{n-1} A_k (b_{k+1} - b_k) \\
 &= A_n b_n - A_1 b_2 - \left(\sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_{k+1} - b_k) - A_1 (b_2 - b_1) \right) \\
 &= A_n b_n - A_1 b_1 - \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_{k+1} - b_k) \quad \square
 \end{aligned}$$

ES 2.7.1 PER CASA : disuguaglianza di Bernoulli, I.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, x \geq -1$$

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Suggerimento: induzione su n

ES 2.7.2 PER CASA: disuguaglianza di Bernoulli, II.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, x \geq 0$$

$$(1+x)^n \geq 1 + n \frac{(n-1)}{2} x^2$$

Suggerimento: induzione su n

Versione generalizzata del principio di induzione

8

Teo 2.8.1 Sia $k \in \mathbb{N}$

Sia $E \subseteq \mathbb{N}$ tale che

(i) $k \in E$

(ii) $\forall n \geq k, n \in E \Rightarrow n+1 \in E$

$$\Rightarrow E = \{k, k+1, k+2, \dots\}$$

Def 2.8.1 Sia $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Definisco $n!$ ricorsivamente, come segue:

$$0! = 1$$

$$1! = 1$$

$$n! = n \cdot (n-1)! = n(n-1)(n-2) \dots 2 \cdot 1$$

ES $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

Così $n! = \prod_{j=1}^n j$

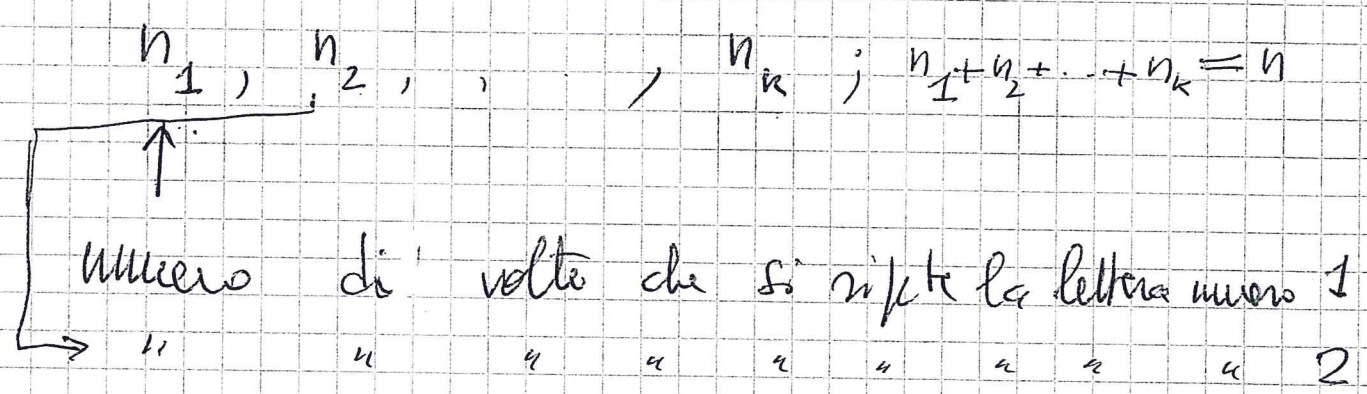
« $n!$ cresce molto rapidamente al crescere di n ; valutare in che modo non è facile »

oss 2.9.1 $n!$ è il numero degli
anagrammi di una parola con n
lettere distinte

DARIO ha $5!$ anagrammi

Se invece ANNA 4 lettere con ripetizioni
compite di sole 2 lettere ^{distinte}, una delle
quali A ripete 2 volte, e l'altra $4-2=2$
volte.

Supponiamo di avere una parola di n
lettere, di cui solo $k \leq n$ sono distinte



MATEMATICA

$n=10, k=6$

H A T E I C
 $n_1=2 \quad n_2=3 \quad n_3=2 \quad n_4=1 \quad n_5=1 \quad n_6=1$

$$\frac{10!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

ANNA $n=4 \quad k=2 \quad n-k=2$
A N
 $n-k=2$

numero degli anagrammi di ANNA:

$$\binom{4}{2} = \binom{n}{k} = \frac{4!}{2! 2!}$$

$$= \frac{24}{4} = 6$$

Def 2.10.1 $\nearrow \binom{n}{k} := \frac{n!}{k! (n-k)!}$

$\left[\begin{array}{l} \text{Sia } n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, k \leq n \end{array} \right]$ *fattore binomiale*

= numero degli anagrammi di
una parola di n lettere

di 2 tipi, una che n

BA BBBA BAAA. . .

ripete k volte e l'altra (per forza)
 $n-k$ volte

oss 2.10.1 Nel caso di una parola di n lettere

con $k \leq n$ distinte, e $n_1, \dots, n_k$ con prima
il numero degli anagrammi e (fattore

multinomiale)

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!} = \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k}$$

Moto da $k=2$ ho la formula
di prima:

$$\frac{n!}{n_1! n_2!}$$

ma $n_1 + n_2 = n$

$$n_2 = n - n_1$$

||

$$\frac{n!}{n_1! (n - n_1)!}$$

$$n_1 = k$$

||

$$\frac{n!}{k! (n - k)!}$$

ES 2.11.1 $\text{CASA} \left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right)$ ha anche un'altra

interpretazione: il numero dei ^{contenuti in} sottoinsiemi
di k elementi di un insieme S di n elementi

ES 2.11.2

$$\left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right) = \left(\begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \right) + \left(\begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right)$$

$$k \geq 1, \quad n \geq k$$

TRIANGOLO DI PASCAL

verifichiamo la formula:

$$\frac{n!}{k! (n - k)!} \stackrel{?}{=} \frac{(n-1)!}{(k-1)! (n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k! (n-1-k)!}$$

Moltiplico per $(k-1)!$, e ottengo:

$$\frac{n!}{k(n-k)!} \stackrel{?}{=} \frac{(n-1)!}{(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k(n-1-k)!}$$

$$\frac{(k-1)!}{k!} = \frac{1}{k}$$

$$\frac{4!}{5!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{1}{5}$$

Divido tutto per $(n-1)!$

$$\frac{n}{k(n-k)!} \stackrel{?}{=} \frac{1}{(n-k)!} + \frac{1}{k(n-1-k)!}$$

moltiplico per $(n-k)!$

$$\frac{n}{k} \stackrel{?}{=} 1 + \frac{n-k}{k}$$

Perché la formula di Tarbapha è vera?

Voglio calcolare il numero di sottoinsiemi di k elementi in S di n elementi.

Fisso $a \in S$: i sottoinsiemi $\checkmark$ di k elementi

Si dividono esattamente in 2 parti: quelli che contengono a e quelli che non contengono a

quanti sono quelli che non contengono a ? ¹³

sono i sottoinsiemi (di k elementi) di $S \setminus \{a\}$

Ma $S \setminus \{a\}$ ha $(n-1)$ elementi. Dunque
essi sono in numero di $\binom{n-1}{k}$

Resta da vedere che i sottoinsiemi (di k
elementi) di S che contengono a sono

$$\binom{n-1}{k-1}$$

perché sono in bi corrispondenza con i sottoinsiemi
di $S \setminus \{a\}$ di $(k-1)$ elementi (basta
aggiungere a ciascuno di questi sottoinsiemi).

ES 2.13.0 (CASA)

$$\dots \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \dots$$

ES 2.13.1

(Formula di NEWTON) Siano

$a, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$

Allora

$n_1 \quad n_2$

$$(2.13.1) \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{\overbrace{k}^{n_1}} b^{\overbrace{n-k}^{n_2}}$$

($n+1$ addendi, per k parte da 0)

? $(a+b+c)^n =$

? $(a+b+c+d)^n$

? $(a_1 + a_2 + \dots + a_k)^n = \sum_{\substack{h_1, h_2, \dots, h_k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ h_1 + h_2 + \dots + h_k = n}} \frac{n!}{h_1! h_2! \dots h_k!} a_1^{h_1} a_2^{h_2} \dots a_k^{h_k}$

$(a+b+c)^n = (A+c)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^k c^{n-k}$
 $\uparrow$
 $A = (a+b)$

$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (a+b)^k c^{n-k}$

$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a^j b^{k-j} c^{n-k}$

$= \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \binom{n}{k} a^j b^{k-j} c^{n-k}$

$j + k - j + n - k = n$

$\sum_{\substack{n_1, n_2, n_3 \in \{0, \dots, n\} \\ n_1 + n_2 + n_3 = n}} \binom{n}{n_1 \ n_2 \ n_3} a^{n_1} b^{n_2} c^{n_3}$
 $n_1 + n_2 + n_3 = n$

'PENSARCI' UN PO'.

Dimostrazione di (2.13.1) :

Per induzione su $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$(a+b)^0 \stackrel{?}{=} \sum_{k=0}^0 \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

//

1

//

$$\binom{0}{0} a^0 b^{0-0} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

si

Supposto vero (ipotesi) $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

devo dimostrare (per) $(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}$

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n$$

$$= (a+b) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

$$= a \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} + b \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}$$

// $\uparrow k+1=j$

$$\sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + //$$

$$\binom{n}{n} a^{n+1} b^0 + \binom{n}{0} a^0 b^{n+1} +$$

$$+ \sum_{k=1}^n \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] a^k b^{n+1-k}$$

II TARPAGUN

$$\binom{n+1}{k}$$

$$= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}$$

Q