

Lezione 29 4/12/19 9-13

sviluppo di $e^{\sec x}$ vicino a $x=0$

$$e^z = \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} + \text{Resto} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \text{Resto}, \quad z \text{ vicino a zero}$$

$$= 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + o(z^3)$$

$$\sec x = x - \frac{x^3}{6} + \text{Resto} = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$e^{\sec x} = 1 + \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) + \frac{1}{2} \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 + \frac{1}{6} \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^3 + o\left(\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^3\right)$$

$\parallel$
 $o(x^3)$

$$= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + x^3\left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right) + o(x^3)$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^3) \quad \text{Altro modo:}$$

$$f(x) = e^{\sec x} = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 + o(x^3)$$

$$f(0)=1, \quad f'(x) = \cos x e^{\sec x}, \quad f'(0)=1$$

$$f''(x) = -\sec x e^{\sec x} + (\cos x)^2 e^{\sec x}, \quad f''(0)=1$$

$$f'''(x) = -\cos x e^{\sec x} - \sec x \cos x e^{\sec x} + 2 \sec x \cos x e^{\sec x} + (\cos x)^3 e^{\sec x}$$

$$f'''(0)=0, \quad = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$$

Teo 29.2.1 (Formula di Taylor con resto di Peano)

Sia $f: [x_0, x_0 + \delta] \rightarrow \mathbb{R}$

derivabile $(n-1)$ volte in $[x_0, x_0 + \delta]$ ($n \geq 1$)

e n volte in x_0 . Allora per $x \rightarrow x_0^+$

$$(29.2.1) \quad f(x) = T_{n-1} f(x_0; x) + \left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + o(1) \right) (x - x_0)^n$$

oss 29.2.1 $T_{n-1} f$ è il pl. di Taylor di f di grado $n-1$,

$$T_{n-1} f(x_0, x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!} (x-x_0)^{n-1}$$

$o(1)$ è una funzione infinitesima per $x \rightarrow x_0$
 dunque la (29.2.1)

$$\begin{aligned} f(x) &= T_n f(x_0, x) + o(1)(x-x_0)^n \\ &= T_n f(x_0, x) + o((x-x_0)^n) \end{aligned}$$

es. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$

$f(x) = \sin x$
 $x_0 = 0$
 $n = 3$

oss. 29.2.2 le ipotesi di teo 29.2.1 sono meno forti delle ipotesi di teo 25.6.1, ma la tesi qui è indicata per x che tende a x_0 .
 In effetti (per caso), vedendo che sotto le ipotesi del teo. 25.6.1 vale allora la (29.2.1).

Dim la (29.2.1) equivale a

$$\frac{f(x) - T_{n-1}f(x_0, x)}{(x - x_0)^n} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + o(1), \quad \begin{array}{l} x > x_0 \\ x \text{ n'ave} \\ \text{a } x_0 \end{array}$$

che a sua volta equivale a

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x) - T_{n-1}f(x_0, x)}{(x - x_0)^n} - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \right] = 0 \quad \text{su } (x_0, x_0 + \delta]$$

così

$$(29.3.1) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - T_{n-1}f(x_0, x)}{(x - x_0)^n} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \quad \text{su } (x_0, x_0 + \delta]$$

Il pmo è dunque il calcolo del limite

$$\text{Poniamo } F(x) = f(x) - T_{n-1}f(x_0, x)$$

$$G(x) = (x - x_0)^n$$

Provo ad applicare Teo 28.2.1 (a F al posto di f

e G al posto di g):

$$F(x_0) = 0 = G(x_0), \quad F, G \text{ continue in } [x_0, x_0 + \delta]$$

$$G'(x) = n(x - x_0)^{n-1} \quad \text{in } (x_0, x_0 + \delta]$$

$\exists \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{F'(x)}{G'(x)}$ allora tale limite è il limite nelle (29.3.1) che cerco.

$$\frac{F'(x)}{G'(x)} = \frac{f'(x) - \left(f'(x_0) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-2)!} (x-x_0)^{n-2} \right)}{n(x-x_0)^{n-1}}$$

Per dim. che $\exists \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{F'(x)}{G'(x)}$ (ultima ipotesi)
che dovremo controllare del teo. 29.2.1) vedr

a veder (controllando che tutte le ipotesi siano

verificate) $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{F''(x)}{G''(x)}$; ripeto il procedimento
(n-1) volte

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{F^{(n-1)}(x)}{G^{(n-1)}(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{n! (x-x_0)}$$

e tale limite finalmente $\exists$

$$= \frac{1}{n!} \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) \text{ dato l'ipotesi}$$

che f è derivabile n-volte in x_0 .

Si deduce

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)$$

che è la (29.3.1). $\square$

Funzioni Converge (e Concate)

Def 29.5.1

$$E \subseteq \mathbb{R}^n$$

$$n = 1, 2$$

H di E Converge

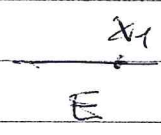
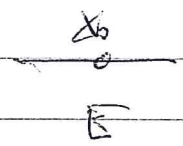
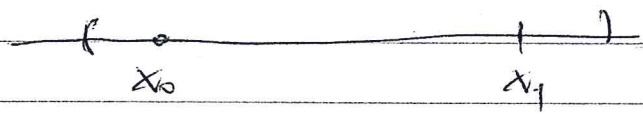
k $x_0, x_1 \in E$, tutto il segmento

che congiunge x_0 con x_1 è contenuto in E .

Exemp 29.5.1

$$n = 1$$

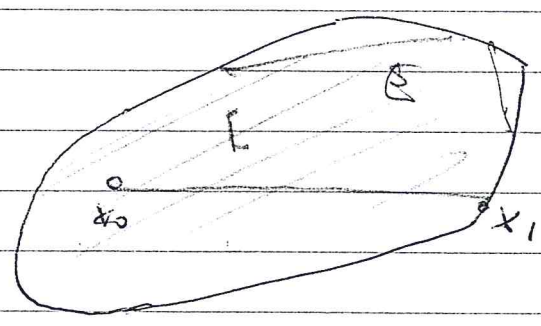
$E =$ intervallo di $\mathbb{R}$
è Converge



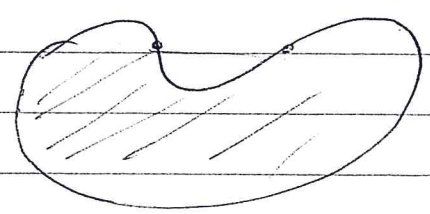
non è Converge

Vol: $E \subseteq \mathbb{R}$ Converge $\Leftrightarrow E$ intervallo

$$n = 2$$



E Converge



E non Converge

Segmento congiungente x_0, x_1 è $\{tx_1 + (1-t)x_0 : t \in [0, 1]\}$

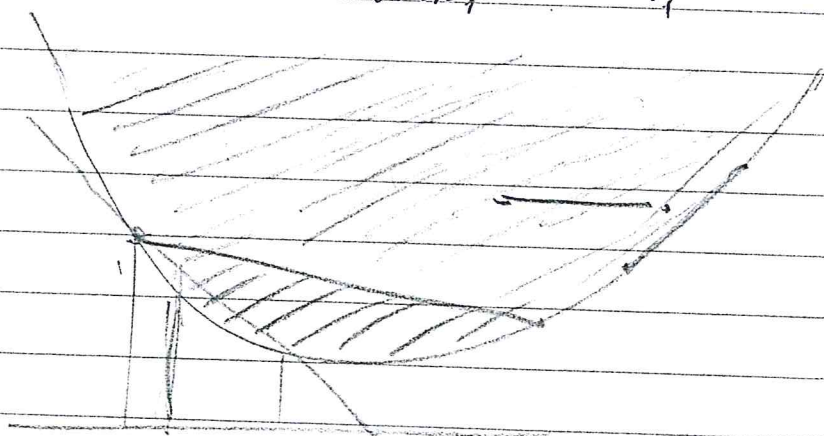
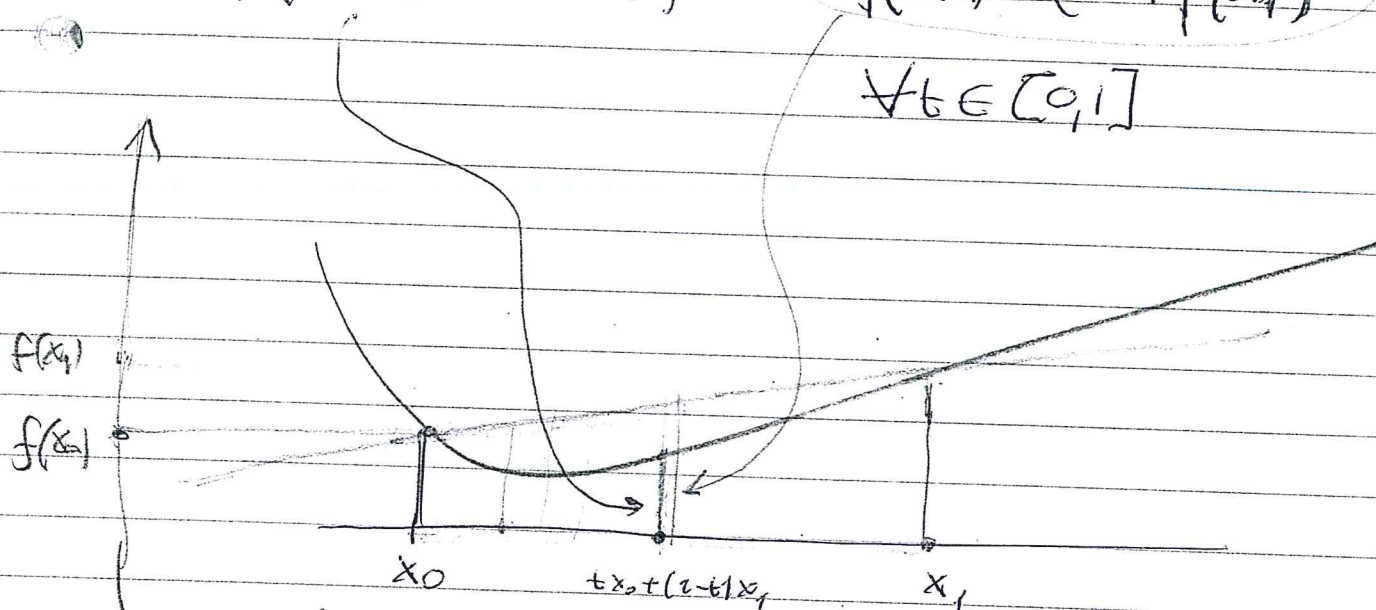
Def 29.6.1 Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ convex,

$f: I \rightarrow \mathbb{R}$ H d'ce Garkha ni I e

$\forall x_0, x_1 \in I,$

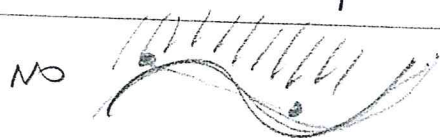
$$f(tx_0 + (1-t)x_1) \leq tf(x_0) + (1-t)f(x_1)$$

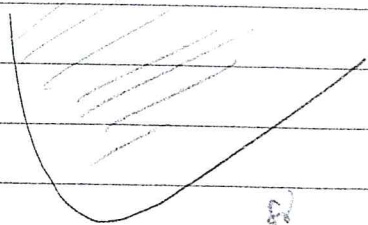
$$\forall t \in [0, 1]$$



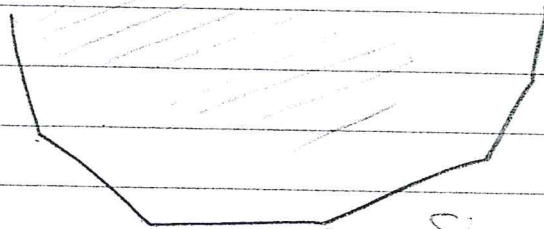
f H d'ce Convexa e - f e' Garkha

f Convexa $\Leftrightarrow \{(x, y): y \geq f(x)\}$ e' Garkha d' $\mathbb{R}^2$





I



I

le Curvefitto non si può caratterizzare usando
le derivate di f (nel senso visto in questo
corso), poiché f può essere continua ma
non derivabile (in molti punti). Pro-
viamo il seguente fatto (lg. 8):

Def 29.7.1 Nella def 29.6.1 f si dice

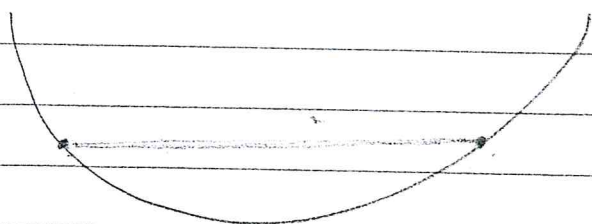
shettamente convessa se

$$\forall x_0, x_1 \in I$$

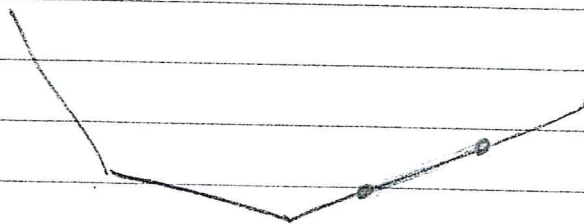
$$\forall t \in (0, 1)$$

$$f(tx_0 + (1-t)x_1) \leq tf(x_0) + (1-t)f(x_1)$$

"Il grafico di f non ha parti concave"



Shett. Conv



Convexa ma
non shett. convessa

Thm 29.8.1. Sei $f \in C^2(I)$.

Alles f konkav $\Leftrightarrow f''(x) \leq 0 \quad \forall x \in I$

f streng konkav $\Leftrightarrow f''(x) < 0 \quad \forall x \in I$

Beispiel $f(x) = \frac{x^2}{2}$; $f''(x) = 1 > 0$

$\Rightarrow f$ ist streng konvex.

$$f(x) = x \log x \quad \forall x > 0$$

$$f'(x) = \log x + 1$$

$$f''(x) = \frac{1}{x} \quad \text{streng konvex}$$

$$f(x) = |x| \quad \text{ist konvex (aber nicht streng)}$$

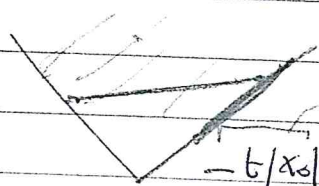
man kann folgende Fragestellung zu 29.8.1

Devo aufwerfen

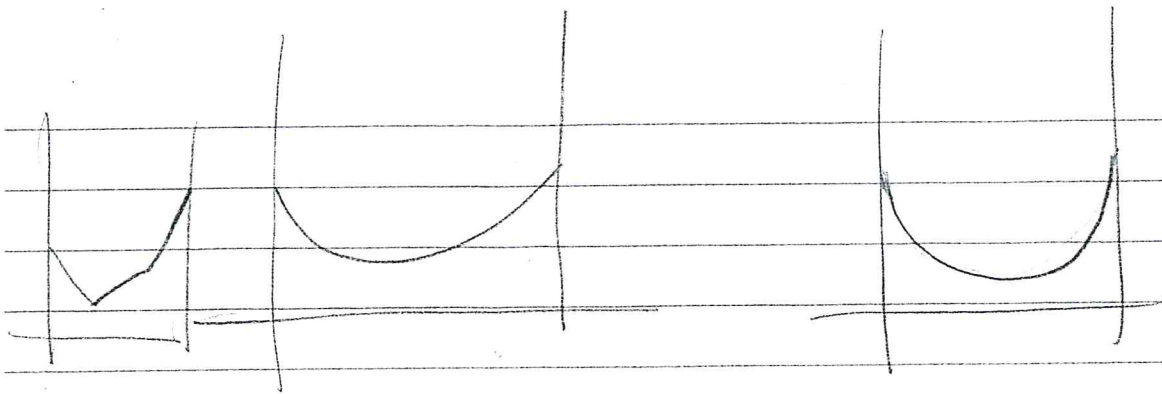
?

$\forall x_0, x_1 \in \mathbb{R},$

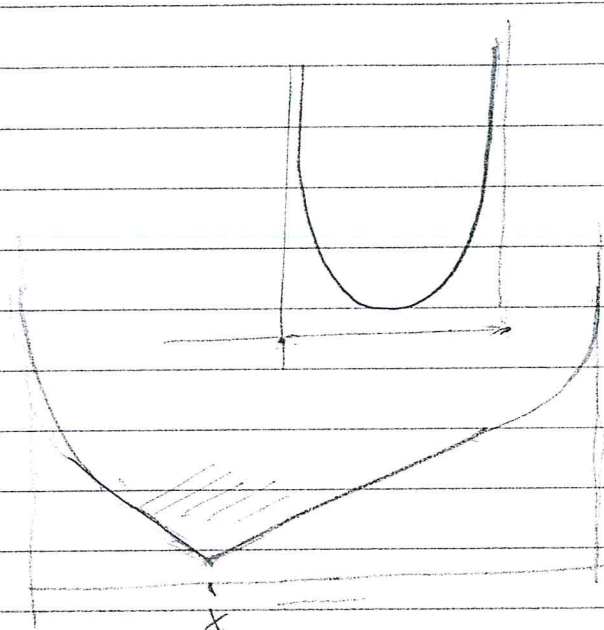
$$|tx_0 + (1-t)x_1| \leq t|x_0| + (1-t)|x_1| \quad \forall t \in [0,1]$$



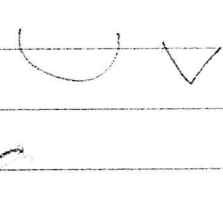
$$|tx_0 + (1-t)x_1| \leq t|x_0| + (1-t)|x_1| \leq t|x_0| + (1-t)|x_1|$$



Teo f convessa in $I \Rightarrow f \in \mathcal{C}^0(I)$



$$I^\circ = \{\text{punti interni di } I\}$$



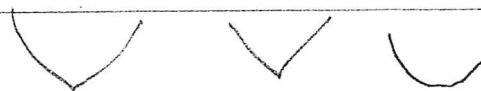
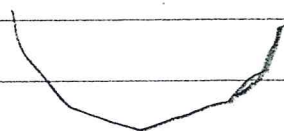
Teo f convessa in I , $x \in I^\circ$. Allora

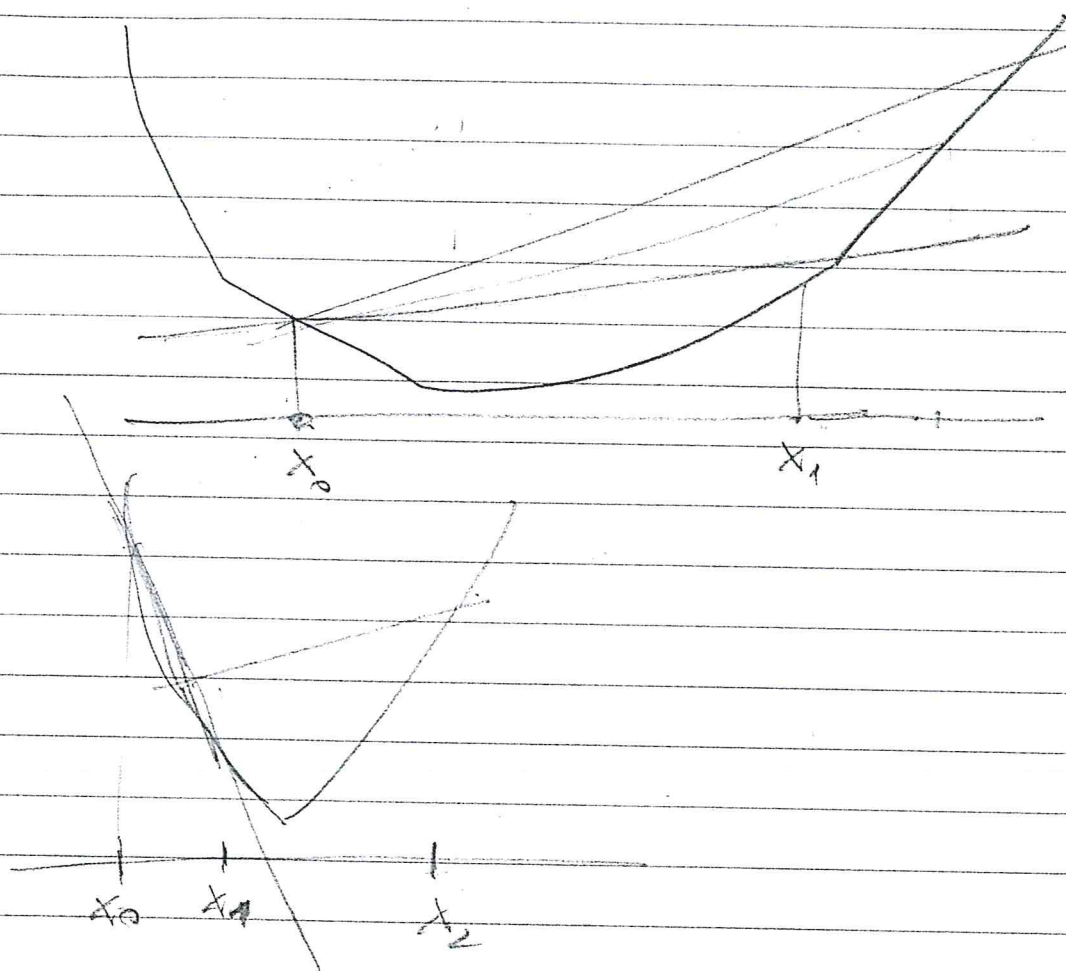
$\exists f'_s(x), f'_d(x)$ derivate sinistre e destre in x

$$-\infty < f'_s(x) \leq f'_d(x) < +\infty$$

Inoltre $x \rightarrow f'_s(x)$ e non decrescente

$x \rightarrow f'_d(x)$ e non decrescente





Thé Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ Supposons $f \in \mathcal{C}^1(I)$.

Alors

f concave $\Leftrightarrow f'$ est décroissante

TEORIA DELL'INTEGRAZIONE

Senza più assegnare una lunghezza (rapportata)

ai solidi in $\mathbb{R}$. Questo non è banale:

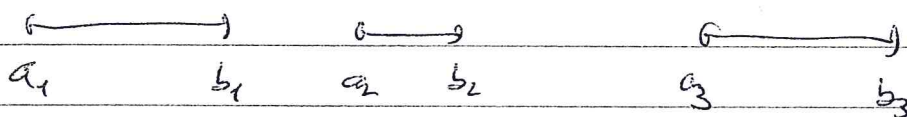
• Se $E = (a, b)$, $-\infty < a \leq b < +\infty$

$$l(E) := b - a$$

• Se $E = \bigcup_{i=1}^n I_i$ $I_i = (a_i, b_i)$

con $-\infty < a_i \leq b_i < +\infty$, $I_i \cap I_j = \emptyset$ $i \neq j$

E suddiviso



$$l(E) := \sum_{i=1}^n l(I_i) = \sum_{i=1}^n (b_i - a_i)$$

• Se $E = [a, b]$, oppure $(a, b]$, oppure $[a, b)$

ancora $l(E) := b - a$.

• Se E è unione finita di intervalli limitati $= \bigcup_{i=1}^n I_i$
 che si intersecano a due a due al + di un estremo
 con I_i intervalli aperti o chiusi o semiaperti, anche

$$l(E) = \sum_{i=1}^n l(I_i)$$



Da una parte è necessario dare una
nozione di lunghezza a insiemi che
non siano più intervalli, dall'altra questo
poiché non era possibile in modo unico.

Nota: $(a, b) = \emptyset$ se $a = b$

$$[a, b] = \{a\} \quad \text{se } a = b$$

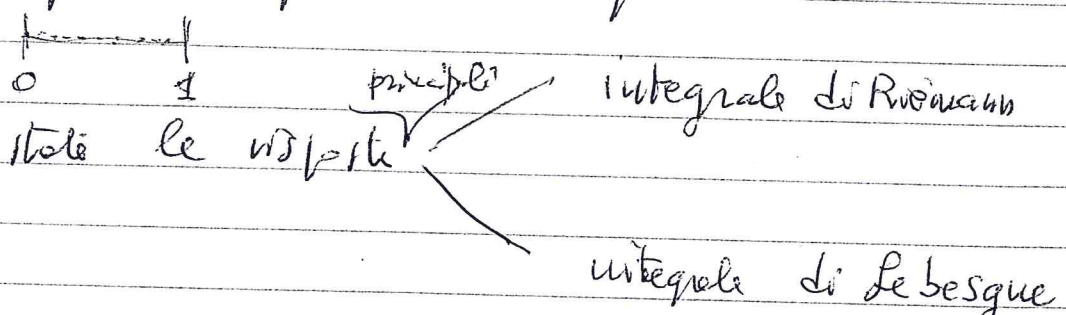
$$[a, b) = \emptyset \quad \text{se } a = b$$

$$l([a, b]) = b - a \Rightarrow \text{i punti hanno}$$

lunghezza zero; un unico punto di punti ha lunghezza zero.

Consideriamo ora $E = \mathbb{Q} \cap [0, 1] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} q_n$

Quale lunghezza ragionevole assegnare a E ?


 sono state le risposte
 integrali di Riemann
 integrali di Lebesgue

Come assegnare lunghezza ad $E \subseteq \mathbb{R}$?

$$l(\emptyset) := 0$$

(Misura di Peano-Jordan)

13

Def 29.13.1/ha $E \subseteq \mathbb{R}$.

$$\hat{l}(E) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^n l(I_i) : n \in \mathbb{N}, \right.$$

I_i intervalli limitati,

$$I_i \cap I_j = \emptyset \text{ se } i \neq j,$$

$$\bigcup_{i=1}^n I_i \supseteq E \}$$

Valga: $\hat{l} = l$ sugli intervalli,

e sui pluriintervalli.

Quindi $\hat{l}$ assegna la lunghezza a qualunque sottoinsieme di $\mathbb{R}$, e sugli intervalli

brutta la lunghezza giusta.

Quanto vale $\hat{l}$ su $E = \mathbb{Q} \cap [0,1]$? When n

Se $I_1, \dots, I_n$ son intervalli che coprono E , come

nella Def. 29.13.1, necessariamente

$$\sum_{i=1}^n l(I_i) \geq 1$$

$$\Rightarrow \hat{l}(E) = 1.$$

A questo punto, anche $\hat{l}((\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0,1]) = 1$,

$$\text{e } [0,1] = (\mathbb{Q} \cap [0,1]) \cup ((\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0,1])$$

unione di 2 insiemi disgiunti, ...

La risposta alla Lebesgue:

Def. 29.16.1 (misura di Lebesgue) Sia $E \subseteq \mathbb{R}$.

$$\tilde{l}(E) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^{+\infty} l(I_i) : I_i \text{ intervalli} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{limitati} \\ \text{disgiunti} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{possibile } \phi \\ I_i \cap I_j = \emptyset \text{ se } i \neq j, \end{array}$$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \supseteq E \}$$

$$\tilde{l} \leq \hat{l}$$

$$\tilde{l} = l \quad \text{sugli intervalli e sui punti isolati}$$

Quanto vale $\tilde{l}$ su $E = \mathbb{Q} \cap [0,1]$?

Sia $q_1, q_n, q_{n+1}, \dots$ numerazione di E

$$\text{Fissato } \varepsilon > 0 \quad \text{considera } I_j = \left(q_j - \frac{\varepsilon}{2^j}, q_j + \frac{\varepsilon}{2^j} \right)$$

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} I_j \supseteq E; \text{ gli } I_j \text{ non sono +} \\ \text{tra loro disgiunti.}$$

$$\tilde{l}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} I_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{l}(I_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} l(I_j) = 2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^j}$$

$$= 2\varepsilon \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} = 2\varepsilon$$

ma $\varepsilon > 0$ è arbitrario.

$$\Rightarrow \tilde{l}(E) = 0, \text{ che è più}$$

rapprovvole di $\hat{l}(E) = 1$.