

Regole di calcolo di limiti di quozienti.

Prop 28.1.1. Supponiamo $f, g : [x_0, x_0 + \delta] \rightarrow \mathbb{R}$
derivabili in x_0 , con $g'(x_0) \neq 0$.

Supponiamo $f(x_0) = g(x_0) = 0$

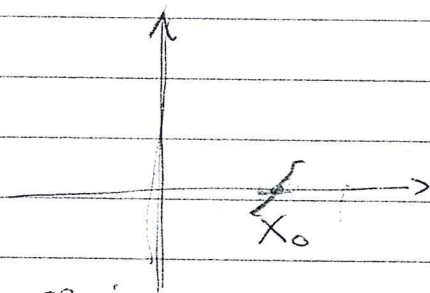
Allora

$$(28.1.1) \quad \exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} \quad \text{in } (x_0, x_0 + \delta]$$

Dim

osservo che il membro destro di (28.1.1)
è ben definito ($g'(x_0) \neq 0$, $f'(x_0) \in \mathbb{R}$)

Inoltre $g(x) \neq 0$ $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta]$ e
sufficientemente vicino a x_0 :



Allora per ogni x
come sopra

$$= \frac{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)}$$

Dunque

poiché f, g sono derivabili in x_0 e $g'(x_0) \neq 0$,

si ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} \quad \text{in } (x_0, x_0 + \delta]$$

||

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \quad \square$$

Teo (De l'Hopital) 28.2.1

Siano $f, g: [x_0, x_0 + \delta] \rightarrow \mathbb{R}$

$f(x_0) = g(x_0) = 0$; f, g continue in $[x_0, x_0 + \delta]$,

e derivabili in $(x_0, x_0 + \delta]$; $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta]$

Allora, è $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R} \cup \{\pm \infty\}$ in $(x_0, x_0 + \delta]$

si ha che

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{in } (x_0, x_0 + \delta]$$

Dim. Applico il Teo di Cauchy: (pag 5

lezione 25): osservo preliminarmente che
le ipotesi del teo 25.5.1 si possono inde-
bolire (avendo la stessa ter.) in:

f, g continue in $[a, b]$

f, g derivabili in (a, b) .

Siamo allora nelle ipotesi del nostro

teorema (con $a \rightarrow x_0, b \rightarrow x_0$)

$$\text{Allora } \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)}$$

$$= \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

$$\uparrow$$

$$\exists c \in (x_0, x), \quad c = c(x, x_0)$$

Da qui se dimostro che

$$(28.3.1) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{in } (x_0, x_0 + \delta]$$

equivale alla ter. Per vedere la (28.3.1)

(cosa) il supponendo $c: x \rightarrow x_0$

Exercice : 28.4.1

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 \log x}{1 - (\cos x)^3 - x^2/2}$$

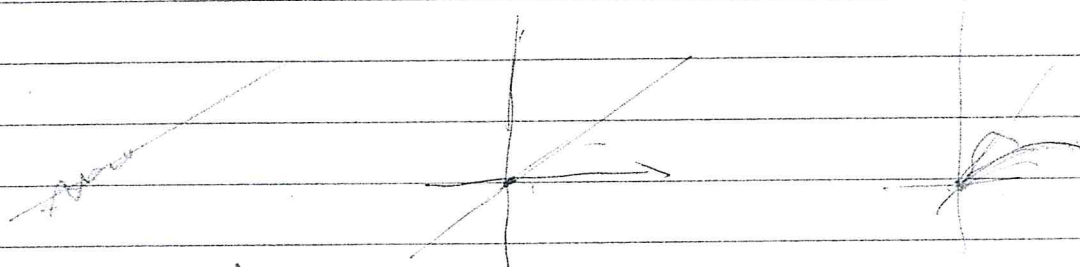
$0 \notin \text{dom}(\log)$, e $\log$ não é estendida com continuidade em 0. No $x^2 \log x$ si, fornece

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \log x & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(0) = 0$, $f \in \mathcal{C}([0, +\infty))$
 f é derivável em $(0, +\infty)$

$$g(x) = 1 - (\cos x)^3 - \frac{x^2}{2}, \quad g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$$

$$g'(x) = +3(\cos x)^2 \sin x - x \neq 0 \quad \text{em } (0, \delta)$$



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2x \log x + x}{3(\cos x)^2 \sin x - x}$$

$$F(x) = \begin{cases} 2x \log x + x & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}, \quad G(x) = 3(\cos x)^2 \sin x - x$$

Resposta D.L.H.

$$\frac{F'(x)}{G'(x)} = \frac{2 \ln x + 2 + 1}{-6 \cos x (\ln x)^2 (\cos x)^3 - 1} \rightarrow -\infty$$

Ritornando: il limite originale $x^- = +\infty$,

Entonces venimos del teo 28.2.1 anche in
intervalli illimitati;

Te 28.5.1 $f, g: (x_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$
continue, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \infty$

f, g derivabili in $(x_0, +\infty)$, $g'(x) \neq 0 \forall x \in (x_0, +\infty)$

Inoltre supponiamo che $\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

Allora $\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Suggerimento: « si può tentare di usare questi

teoremi nel calcolo di limiti del tipo

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \int_a^x \dots \gg$$

Algebra degli $\circ$ piccoli e degli $\circ$ grandi

Def 28.6.1 Ssa $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo,

$$f, g : I \rightarrow (0, +\infty)$$

($\hookrightarrow f, g$ non possono > 0 bisognerebbe rappresentare in $|f|, |g|$), $x_0 \in \bar{I}$

Si dice che f è un $\circ$ piccolo di g

in x che tende a x_0 , e si scrive

$$f = o(g) \quad \text{in } x \rightarrow x_0$$

se « f tende a zero + rapidamente di

g in $x \rightarrow x_0$ », $\hookrightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

(si dice che f è un infinitesimo di ordine maggiore di g in $x \rightarrow x_0$)

Nota $f = o(g)$, $h = o(g) \Rightarrow f + h = o(g)$

$$\forall \alpha > 0, \alpha \in \mathbb{R}, f = o(g) \quad \alpha f = o(g)$$

Def 28.7.1

Siano $f, g: I \rightarrow (0, +\infty)$

$x_0 \in \bar{I}$

si dice che $f = O(g)$ se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha \neq 0$$

(si dice che f, g hanno lo stesso ordine di
infinitesimo in $x \rightarrow x_0$)

Esercizio 28.7.1

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\log x - x}$$

oss « o/o »
semplice

oss non vogliamo applicare D.L.H.

Usa Taylor

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

$$\text{per } x = -x = -\frac{x^3}{6} + o(x^3), o(x^4), o(x^5)$$

per $x \rightarrow 0$

$$e^{1/x} = 1 + x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$+ \frac{1}{2} \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right)^2$$

$$+ \frac{1}{6} \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right)^3 + o(x^3) =$$

$$= 1 + x - \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^3 + o(x^3)$$