

Lezione 26

27/11/2019

9-13

Dim (Teo 25.8.1)

Induzione su n . $n=1$ è Lagrange, OK.
Poi si assume, per $n \geq 2$,

$$F(x) := f(x) - \left(f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} (x-a)^{n-1} \right)$$

$$G(x) := (x-a)^n$$

Vogliamo applicare il teo. 25.5.1 (di Cauchy)

con F al posto di f e G al posto di g ,
e $\hat{c}$ al posto di c
(le ipotesi del teo di Cauchy sono verificate).

Si ha: $\exists \hat{c} \in (a, b)$:

$$(26.1.1) \quad F'(\hat{c})(G(b) - G(a)) = G'(\hat{c})(F(b) - F(a)).$$

Calcoliamo:

$$F'(x) = f'(x) - \left(f'(a) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-2)!} (x-a)^{n-2} \right)$$

$$\bullet \quad G(b) - G(a) = (b-a)^n - 0 = (b-a)^n$$

$$\bullet \quad G'(x) = n(x-a)^{n-1}$$

$$\bullet \quad F(b) - F(a) = f(b) - \left(f(a) + f'(a)(b-a) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} (b-a)^{n-1} \right)$$

- 0

$$= f(b) - \left(f(a) + f'(a)(b-a) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} (b-a)^{n-1} \right)$$

Iniziamo queste 4 formule (con $\hat{c}$ al posto di x)
nella (26.1.1), e si ottiene:

$$f'(\hat{c}) = \left(f'(a) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-2)!} (\hat{c}-a)^{n-2} \right) (b-a)^n$$

II

$$n (\hat{c}-a)^{n-1} \left(f(b) - \left[f(a) + f'(a)(b-a) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} (b-a)^{n-1} \right] \right)$$

Porto i termini con $\hat{c}$ da una parte, e quelli
con $(b-a)$ dall'altra:

$$f'(\hat{c}) = \left(f'(a) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-2)!} (\hat{c}-a)^{n-2} \right)$$

(26.2.1)

$$n (\hat{c}-a)^{n-1}$$

II

$$f(b) - \left[f(a) + f'(a)(b-a) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} (b-a)^{n-1} \right]$$

$$(b-a)^n$$

Poniamo $f' = g$; g è derivabile $(n-1)$ volte in $[a,b]$, e
il membro sinistro è

$$g(\hat{c}) = \left(g(a) + \dots + \frac{g^{(n-2)}(a)}{(n-2)!} (\hat{c}-a)^{n-2} \right)$$

(26.2.2)

$$n (\hat{c}-a)^{n-1}$$

Applico l'ipotesi induttiva a g , sull'intervallo

$[a, \hat{c}]$: ne deduco che $\exists c \in (a, \hat{c})$:

$$(26.2.2) = \frac{g^{(n-1)}(c) (\hat{c} - a)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Deduciamo

$$\frac{g^{(n-1)}(c) (\hat{c} - a)^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{f(b) - [f(a) + f'(a)(b-a) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}]}{(b-a)^n}$$

$$\frac{f^{(n)}(c)}{n!} = \frac{f(b) - [f(a) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}]}{(b-a)^n}$$

Moltiplicando per $(b-a)^n$ si ottiene la tesi (inizio

di pg 7 lemma 25).

□

26.3.1. Esami per Corollari Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile

in $[a, b]$, e $f'(x) > 0 \quad \forall x \in [a, b]$. Allora

f è strettamente crescente in $[a, b]$. Se invece

$f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in [a, b]$, allora f è nondecrecente

in $[a, b]$.

• $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile, strett. crescente



$$f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$$

Anzi

• $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile, non decrescente



$$f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$$

Nota Se f è crescente strett., può non essere
convessa (tutt'altro derivabile).

Se f è crescente ^{strett.} e derivabile, può avere

più di una derivata 0 (es. $f(x) = x^3$)

ES Sra $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile in (a, b) ,

$$f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b).$$

Allora f è costante.

→ 26.4.1
Def

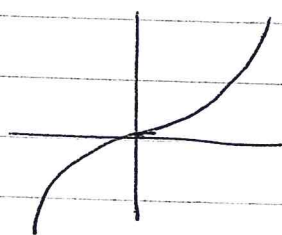
Sra $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile in (a, b) ,
 $x_0 \in (a, b)$. Si dice che x_0 è un
punto critico di f (o stazionario) se $f'(x_0) = 0$.

Abbiamo visto che nei punti di max/min interi locali
la derivata si annulla (se f è derivabile), vedi Cor. 25.2.1
e lo stesso vale

Quindi, per una funzione derivabile, i max/min locali interni sono stazionari.

Domanda: se ho un punto stazionario (interno)

per una f derivabile, posso dire che è un max loc o un min loc? No!



$$f(x) = x^3$$

0 è stazionario ma non è né max loc né min loc.

È naturale allora chiedersi quali ulteriori condizioni vanno impostate affinché un punto stazionario sia max o min loc.

Teo 26.5.1 Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^2([a, b])$

Sia $x_0 \in (a, b)$: $f'(x_0) = 0$

Se $f''(x_0) > 0$ allora x_0 min loc stretto*

Oss 26.5.1 la $f''(x_0) \geq 0$ non garantisce invece la tesi anzi non garantisce nemmeno che x_0 sia min loc; $f(x) = x^3$

$\exists$ U intorno di x_0 tale che
* : $\forall f(x_0) < f(x) \quad \forall x \in U \cap [a, b] \setminus \{x_0\}$

Dim Dal teo. 25.6.1 (Taylor) si ha ($n=2$)
 $\exists c \in (a, b)$:

$$26.6.1) \quad f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)}_{\text{polin. di Taylor}} + \underbrace{f''(c) \frac{(x-x_0)^2}{2}}_{\text{Resto di Lagrange}}$$

Dato che per ipotesi $f'(x_0) = 0$, abbiamo

$$f(x) = f(x_0) + f''(c) \frac{(x-x_0)^2}{2}$$

$$f(x) - f(x_0) = f''(c) \frac{(x-x_0)^2}{2}$$

Voglio dim. che $\exists U$ intorno di x_0 :

$$f(x) - f(x_0) > 0 \quad \forall x \in U \cap [a, b] \setminus \{x_0\}$$

Cioè voglio dim. che $\exists U$ intorno di x_0 :

$$f''(c) > 0 \quad \forall x \in U \cap [a, b] \setminus \{x_0\}$$

Notiamo che vale il risultato (esercizio 14.6.1):

Sia $h: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ I intervallo, $h \in \mathcal{C}^p(I)$,
 e sia x_0 interno a I . Se

$$h(x_0) > 0$$

allora $\exists U$ intorno di x_0 tale che

$$h(x) > 0 \quad \forall x \in U \cap I$$

(si chiama: lemma della permanenza del segno).

7

Applichiamo il teorema della permanenza
del segno a $h = f'' \in \mathcal{C}^0([a, b])$.

Deduco che $\exists$ unione di x_0 tale che

$$(26.7.1) \quad f''(x) > 0 \quad \forall x \in U \cap [a, b]$$

Applichiamo la (26.6.1) in $U \cap [a, b]$:

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f''(c)}{2} (x - x_0)^2 \quad \forall x \in U \cap [a, b]$$

ma c sta tra x e x_0 , dunque $c \in U \cap [a, b]$

e dunque dalla (26.7.1) si ha $f''(c) > 0$.

□

Con una dimostrazione analoga si ha

Teo (in Cor).: sia $n \geq 2$, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$,

$f \in \mathcal{C}^n([a, b])$, da $x_0 \in (a, b)$, e

Supponiamo:

$$0 = f'(x_0), f''(x_0) = 0, \dots, f^{(n-1)}(x_0) = 0.$$

Se n è pari e $f^{(n)}(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ è univ.
loc. min.

Se n è dispari e $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, x_0 non
è né max né min loc.

Qualche elemento di equazioni differenziali
lineari. Sono equazioni in cui l'incognita

è una funzione. Noi studieremo

adesso le equazioni lineari,

$$a u'' + b u' + c u = f \quad (26.8.1)$$

(non tutte nulli)

dove: $a, b, c \in \mathbb{R}$ sono assegnati

(sono dunque costanti, e per questo si

chiamano a coefficienti costanti);

$f = f(x)$ è una funzione ^{continua} assegnata $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

(a valori reali). Quando $f \equiv 0$ la (26.8.1)

si dice omogenea, ^(altrimenti si dice non omogenea.) la funzione $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

è l'incognita del problema; l'equazione

si dice del secondo ordine, perché la derivata

di ordine + alto che compare nella (26.8.1)

è due. La (26.8.1) è lineare, perché u, u', u''
appaiono linearmente: non appaie nell'equazione,
ad esempio, $u^2, u'^3, \sin(u'')$, ecc.

Di interesse (non in Analisi I) è lo studio di
sistemi di equazioni della forma (26.8.1).

della (26.8.1) si riescono a scrivere esplicitamente le soluzioni (cosa molto rara in un'eq. differenziale).

Cominciamo con $f \equiv 0$:

$$au'' + bu' + cu = 0 \quad (26.9.1)$$

se $a \neq 0, b = 0, c \neq 0$ $cu = 0 \Rightarrow u \equiv 0$

se $a = 0, c = 0, b \neq 0$ $bu' = 0 \Rightarrow u' = 0$

$\Rightarrow u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è una costante, $u(x) = c_1$

(l'equazione ha infinite soluzioni)

se $a \neq 0, b = 0, c = 0$: $au'' = 0 \Rightarrow u'' = 0$

$\Rightarrow u(x) = c_1 x + c_2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, al

variare di c_1, c_2 costanti (reali).

Anche qui le soluzioni infinite.

Per fare un uso della (26.8.1) abbia un'unica soluzione, bisogna assegnare delle "condizioni di partenza" alla u : ad esempio si assegna ($a \neq 0$)

$$(26.9.1) \quad \begin{cases} u(0) = u_0 \\ u'(0) = u_1 \end{cases}$$

con $u_0, u_1 \in \mathbb{R}$

di Cauchy

Per le eq. del 1° ordine si assegnano 1 condizione, per le eq. del 2° ordine si assegnano 2 condizioni.

Con $a = 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$

$$bu' + cu = 0 \quad (26.10.1)$$

eq. del 1° ordine. Posso dividere per b !

$$u' + \frac{c}{b} u = 0$$

Per semplicità, poniamo $d := c/b$

$$u' + du = 0$$

$$u' = -du \Rightarrow u(x) = C_1 e^{-dx}$$

al valore di $C_1 \in \mathbb{R}$. Si può dimostrare

che tutte le soluzioni sono di questo tipo.

« dx è l'integrale della costante d tra

0 e x »

con $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c = 0$

$$au'' + bu' = 0$$

$$u'' + \frac{b}{a} u' = 0$$

$$p = b/a$$

$$u'' + p u' = 0$$

Poniamo $u' = v$

$$v' + p v = 0$$

(26.11.0)

$$\Rightarrow v(x) = c_1 e^{-px} \Rightarrow$$

$$u'(x) = c_1 e^{-px}$$



$$u(x) = -\frac{c_1}{p} e^{-px}$$

per così
trovare la
famiglia delle
soluzioni. a 2 parametri

con $a \neq 0$, $b = 0$, $c \neq 0$

$$a u'' + c u = 0$$

(26.11.1)

Nota: il trucco di porre $u' = v$ non semplifica

$$(26.11.1) \quad \begin{cases} a v' + c u = 0 \\ u' = v \end{cases}$$

sistema di 2 equazioni del 1° ordine

$$U = (u, v); \quad U' = M U$$

$$U' = \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c}{a} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ -\frac{c}{a} u \end{pmatrix}$$

«esponenziale di matrice»

$$u'' + \frac{c}{a} u = 0$$

$$q = c/a$$

$$u'' + q u = 0$$

(26.12.1)

$$u'' = -q u$$

$$q > 0 \quad u(x) = c_1 \sin(\sqrt{q} x),$$

$$u(x) = c_2 \cos(\sqrt{q} x)$$

Dato che la (26.12.1) è lineare,

la somma di soluzioni resta soluzione,

e tutte le soluzioni saranno

$$u(x) = c_1 \sin(\sqrt{q} x) + c_2 \cos(\sqrt{q} x)$$

Fare a caso il caso $q < 0$:

Stendiamo adesso il caso generale

$$a u'' + b u' + c u = 0, \quad \text{con } a \neq 0$$

$$u'' + \frac{b}{a} u' + \frac{c}{a} u = 0$$

$$\alpha = \frac{b}{a}, \quad \beta = \frac{c}{a}$$

(26.12.1)

$$u'' + \alpha u' + \beta u = 0$$

TRUCCO:

13

Invece di lavorare nell'incognita u ,
risolve nell'incognita v , legata ad u :

$$(26.13.1) \quad u(x) = e^{\lambda x} v(x), \text{ con } \lambda \in \mathbb{C} \text{ da scegliere}$$

$$u'(x) = \lambda e^{\lambda x} v(x) + e^{\lambda x} v'(x)$$

$$u''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x} v(x) + \lambda e^{\lambda x} v'(x)$$

$$+ \lambda e^{\lambda x} v'(x) + e^{\lambda x} v''(x)$$

$$= \lambda^2 e^{\lambda x} v(x) + 2\lambda e^{\lambda x} v'(x) + e^{\lambda x} v''(x)$$

$$= e^{\lambda x} (v''(x) + 2\lambda v'(x) + \lambda^2 v(x))$$

Devo sostituire nella (26.12.1) queste espressioni:

$$e^{\lambda x} [v'' + 2\lambda v' + \lambda^2 v] + \alpha (v' + \lambda v) + \beta v = 0$$

$$e^{\lambda x} [v'' + v'(\alpha + 2\lambda) + v(\lambda^2 + \alpha\lambda + \beta)] = 0$$

α, β coefficiente dell'eq: appare un polinomio

$$P(\lambda) = \lambda^2 + \alpha\lambda + \beta, \text{ detto polinomio}$$

caratteristico dell'eq. Se scegliessi $\lambda: P(\lambda) = 0$

l'eq. soddisfatta da v è del 2° ordine "finto",
cioè posso abbassarla di ordine con lo stesso
trucco di (26.11.0). Questo giustifica il trucco della