

Teo 26.1.1. Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile in $[a, b]$.

Supponiamo che a sia un punto di minimo di f . Allora $f'(a) \geq 0$. (25.1.0)

Dim Sia $x \in (a, b]$; dato che a è un minimo di f si ha

$$f(a) \leq f(x)$$

$$\Rightarrow f(x) - f(a) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b]$$

Dividendo per $x - a > 0$, e ottenendo

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0 \quad (25.1.1)$$

Poiché f è derivabile in $[a, b]$, in particolare è derivabile in a , dunque

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) \in \mathbb{R} \quad \text{in } (a, b].$$

Dalla (25.1.1) e dalle proprietà del limite, segue

$$f'(a) \geq 0.$$

Il caso dei punti di massimo si ottiene da Teo 26.1.1 facendo $f \rightarrow -f$ e dunque la (25.1.0) si rovescia. $\square$

Con 25.2.1 sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile
in $[a, b]$, $x_0 \in (a, b)$ di minimo in f .
Allora

$$f'(x_0) = 0$$

Dim. Considero $g = f|_{[a, x_0]} : [a, x_0] \rightarrow \mathbb{R}$

allora g è derivabile in $[a, x_0]$, e

$$g'(x_0) \leq 0.$$

Considero $h = f|_{[x_0, b]} : [x_0, b] \rightarrow \mathbb{R}$, allora

h è derivabile in $[x_0, b]$, e

$$h'(x_0) \geq 0.$$

Ma
$$g'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ in } [a, x_0]$$

$$h'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ in } [x_0, b]$$

Ma f è derivabile in x_0 , e (Lemma uniqueness)

$$f'(x_0) = g'(x_0) = h'(x_0)$$

$$\begin{array}{cc} \wedge & \vee \\ 0 & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow f'(x_0) = 0.$$

□

13

Noi siamo da Cor. 25.2.1 vale anche

x_0 è l.b. di unione locale:

Def 25.3.1 Ha $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I intervallo,

$x_0 \in I$. Si dice che x_0 è di unione

locale in f se $\exists U$ intorno di x_0 tale
che

$$f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in I \cap U$$

Equivalentemente, $f|_U$ ha x_0 come minimo
globale.

Teo (Rolle) 25.3.1 Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile

in $[a, b]$, e supponiamo $\boxed{f(a) = f(b)}$

Allora $\exists c \in (a, b)$, $f'(c) = 0$.

Dim Siccome f è derivabile in $[a, b]$,

allora f è continua in $[a, b]$ (Prop. 22.6.1).

Del teo 20.4.1 $\exists m = \min f([a, b])$

$$\exists M = \max f([a, b])$$

(valore minimo e massimo di f). Ovviamente $m \leq M$.

In seguito due casi.

1) $m = M$. Allora $f \equiv \text{costante}$, cioè

$$m = f(x) = M \quad \forall x \in [a, b]. \text{ Ne segue facilmente:}$$

$$f'(x) = 0 \quad \forall x \in [a, b].$$

2) $m < M$. Possiamo $m = f(x_m)$

$$M = f(x_M)$$

con $x_m \in [a, b]$, $x_M \in [a, b]$. (x_m e x_M

non necessariamente unici). Ossia da

$x_m \neq x_M$ (altrimenti $m = M$). Dico anche

che non è possibile $\{x_m, x_M\} = \{a, b\}$

(cioè x_m e x_M non possono essere i due estremi di $[a, b]$): infatti, se lo fossero,

dall'ipotesi $\boxed{f(a) = f(b)}$ seguirebbe $m = M$.

Dunque o x_m o x_M non è un estremo di

$[a, b]$; dunque o x_m o x_M è interno ad

$[a, b]$. Dal Cor. 25.2.1 segue che, si ad

esempio $x_m \in (a, b)$, $f'(x_m) = 0$.

69

Teo 28.8.1 (Cauchy). Siano $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

f, g derivabili in $[a, b]$. Allora

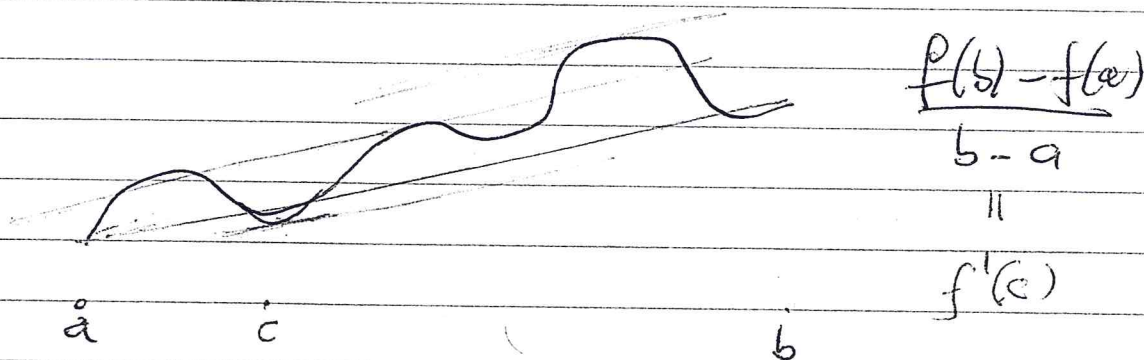
$$\exists c \in (a, b)$$

tale che

$$(28.8.1) \quad f'(c)(g(b) - g(a)) = g'(c)(f(b) - f(a))$$

Prima di fare la dimostrazione, equivaliamo un caso particolare: $g(x) = x$. In tal caso, la (28.8.1) diventa

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$



e l'annunciato si chiama Teorema di Lagrange.

Dim Consideriamo $F(x) = f(x)(g(b) - g(a)) -$
 $g(x)(f(b) - f(a)).$

$$F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

F è derivabile in $[a, b]$.

$$F(a) = f(a)(g(b) - g(a)) - g(a)(f(b) - f(a))$$

$$F(b) = f(b)(g(b) - g(a)) - g(b)(f(b) - f(a))$$

Si ha $F(a) = F(b)$.

Applichiamo teo 25.3.1 (Rolle) a F :

$$\Rightarrow \exists c \in (a, b) : F'(c) = 0$$

$$\forall x \quad F'(x) = f'(x)(g(b) - g(a)) - g'(x)(f(b) - f(a))$$

$$0 = F'(c) = f'(c)(g(b) - g(a)) - g'(c)(f(b) - f(a))$$

Una generalizzazione non banale e piuttosto
del teo di Lagrange. □

Teo 25.6.1 (FORMULA DI TAYLOR con RESTO DI

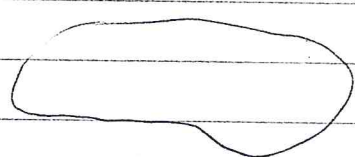
LAGRANGE). Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, ∞^M
 $n \geq 1$

f derivabile n volte in $[a, b]$.

Allora $\exists c \in (a, b)$:

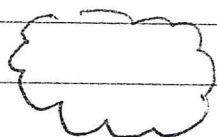
$$f(b) = \left(f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} \right) \\ = \frac{f^{(n)}(c)(b-a)^n}{n!}$$

Osservazioni e nomenclatura: Se $n=1$ (Caso + semplice); $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$,
che è la tesi del teorema di Lagrange.



si chiama polinomio di
Taylor di f di ordine $n-1$
centrato in $x=a$

Nota:
 $c=c(a, b)$



si chiama resto di Lagrange

polinomio di Taylor di ordine n .

$$f(b) \xrightarrow{\text{polinomio di Taylor}} T_{n-1}(a; b) = R_n(b-a, c) \xleftarrow{\text{Resto}}$$

Esempio $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \tan x$, $a=0=x_0$
 $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, e $\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq 1$

$$\tan x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \text{Resto} = x - \frac{x^3}{3!} + \text{Resto}_4(x, c)$$

Nel libro $b \rightarrow x$, $a \rightarrow x_0$, $b-a = x-x_0 \rightarrow h$
 $f(x) = \left(f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} \right) = f^{(n)}(c)(x-x_0)^n$

$$\text{Sce } x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{\sin(c)}{4!} x^4$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{\sin(c)}{24} x^3 \quad \text{se } x \neq 0$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\sin x}{x} - 1 = -\frac{x^2}{6} + \frac{\sin(c)}{24} x^3 \quad , \quad c = c(x)$$

$$\text{Noi sappiamo } \sin(c) = \sin(c(x)) \in [-1, 1]$$

Dividiamo per x^α ($x \neq 0$)

$$\frac{\frac{\sin x}{x} - 1}{x^\alpha} = \frac{-\frac{x^2}{6} + \frac{\sin(c)}{24} x^3}{x^\alpha}$$

Se $\alpha = 2$ si ha

$$\frac{\frac{\sin x}{x} - 1}{x^2} = -\frac{1}{6} + \frac{\sin(c)}{24} x$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{x} - 1}{x^2} = -\frac{1}{6} \quad \text{e } \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

(perché $x \rightarrow 0$, e $\frac{\sin(c)}{24}$ è limitato)

oss 25.8.1. Come abbiamo deciso n ? ($n=4$)
la scelta "più economica" per affrontare l'esercizio.

Alcuni sviluppi sono espliciti:

$$\sin x = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(-1)^{i-1} x^{2i-1}}{(2i-1)!} + \text{Resto}_n(x)$$

$$\cos x = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(-1)^i x^{2i}}{(2i)!} + \text{Resto}_n(x)$$

$$e^x = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x^i}{i!} + \text{Resto}_n(x)$$

Ricordare $e = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{i!}$

$$e = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i!} + \text{Resto}_n(1)$$

$$\log(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(-1)^{i-1} (x-1)^i}{i} + \text{Resto}_n(x)$$



$$x_0 = 1, \quad x \in (0, +\infty)$$