

Let Houe 24 21/11/2019

9-11

1

$$f(x) = \sin(2x), \quad g(y) = \arctan(1+y)$$

$$h(z) = \log(1+z^3)$$

$$h(g(f(x))) = h(\arctan(1+\sin(2x)))$$

$$= \log\left(1 + \left(\arctan(1+\sin(2x))\right)^3\right)$$

$$\frac{d}{dx} h(g(f(x))) = \frac{1}{1 + \left(\arctan(1+\sin(2x))\right)^3}$$

$$\cdot \frac{d}{dx} \left(\arctan(1+\sin(2x))\right)^3$$

$$= \boxed{\phantom{0}} \cdot 3 \left(\arctan(1+\sin(2x))\right)^2 \frac{d}{dx} \arctan(1+\sin(2x))$$

$$= \boxed{\boxed{\phantom{0}}} \frac{1}{1 + (1 + \sin(2x))^2} \frac{d}{dx} \sin(2x)$$

$$= \boxed{\boxed{\boxed{\phantom{0}}}} 2 \cos(2x)$$

Teo: ha  $f: [a, b] \rightarrow [c, d]$ ,  $x_0 \in [a, b]$

$f$  derivabile in  $x_0$ .

ha  $g: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y_0 = f(x_0)$

$g$  derivabile in  $y_0$ .

Allora  $g \circ f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  è derivabile

in  $x_0$  e si ha

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(y_0) f'(x_0) \quad (24.2.1)$$

Dim ha  $F := g \circ f$ , Dato dim.

che  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0}$  su  $[a, b] \setminus \{x_0\}$

e che tale limite  $= g'(f(x_0)) f'(x_0)$

Definiamo

$$A := \{x \in [a, b] \setminus \{x_0\} : f(x) \neq f(x_0)\}$$

$$B := \{x \in [a, b] : f(x) \neq f(x_0)\}$$

$$A, B \subseteq [a, b], \quad A \cap B = \emptyset$$

$$A \cup B = [a, b] \setminus \{x_0\}.$$

Sufficienza per la tesi.

$$1) \quad x_0 \notin \bar{A}$$

$$2) \quad x_0 \notin \bar{B}$$

$$3) \quad x_0 \in \bar{A} \cap \bar{B}$$

(o  $x_0 \in \bar{A} \cap \bar{B}$  oppure  $x_0 \notin \bar{A} \cap \bar{B}$ , in tal

$$\text{caso } x_0 \in \bar{A}^c \cup \bar{B}^c = ([a, b] \setminus \bar{A}) \cup ([a, b] \setminus \bar{B})$$

$\uparrow$   
1)

$\uparrow$   
2)

Dimostriamo la (24.2.1) nel caso 1).

fra  $x_0 \notin \bar{A}$ ; allora  $\exists t > 0$ :

$$(B_t(x_0) \setminus \{x_0\}) \cap A = \emptyset$$

$$\text{Dunque } B_t(x_0) \setminus \{x_0\} \subseteq B$$

$$([a, b] \setminus \{x_0\}) \cap B_t(x_0) = B \cap B_t(x_0) \quad (24.3.0)$$

Devo calcolare

$$(24.3.1) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \quad \text{su } [a, b] \setminus \{x_0\}$$

Dal lemma di localizzazione (Lemma 19.1.1)  
e dalla (24.3.0)



il limite nella (24.3.1) equivale ad

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \quad \text{in } B \cap B_f(x_0)$$

Dato che  $x \in B$   $f(x) - f(x_0) \neq 0$ ,

però siamo  $\forall x \in B$

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{F(x) - F(x_0)}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$\downarrow$   $g'(f(x_0))$        $\downarrow$   $f$  deriv. in  $x_0$   
 $f'(x_0)$

dal Lemma 19.2.1 (di composizione),  
usando che  $g$  è derivabile in  $y_0$

Abbiamo dim. la (24.2.1) nel caso 1)

Dimostriamo la (24.2.1) nel caso 2).

Devo calcolare  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0}$  su  $A \cap B_f(x_0)$

5

Tale limite fa zero, poiché  $\forall x \in A \cap B, (x_0)$

$$\text{alora } f(x) = f(x_0) \Rightarrow g(f(x)) = g(f(x_0)) \Rightarrow$$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0 \text{ su } A \cap B, (x_0)$$

Basta allora dimostrare che  $g'(y_0) f'(x_0) = 0$

$$\forall x \in A \cap B, (x_0) \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0 \quad e$$

da cui quando facciamo il limite del rapporto incrementale, tale limite viene 0.

Abbiamo dim. la (24.2.1) nel caso 2).

Resta da dim. la (24.2.1) nel caso 3).

Sia  $x_0 \in \bar{A} \cap \bar{B}$ . Useremo il Lemma 18.13.1

(con  $E$  e  $F$  ricoperti da  $A$  e  $B$ ,

e  $\bar{x}$  ricoperto da  $x_0$ ). Devo

per vedere che separatamente entrambi i loro

uguali i limiti del rapporto incrementale di  $F$  in  $x_0$

su  $A$  e su  $B$  (e saranno uguali a zero).

Mosto di

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = 0 \quad \text{in } A \quad (24.6.1)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = 0 \quad \text{in } B \quad (24.6.2)$$

Fatto questo, considero  $A \cup B = [a, b] \setminus \{x_0\}$ ,

e usando il lemma 18.13.1, ho la tesi.

La (24.6.1) si dimostra come nel punto 2).

Per caso, dimostro la (24.6.2):

$$\text{Se } x \in B \quad \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Completare:

o dal  
lemma di restrizione

$\exists$  punto



CASA

$$\frac{x^2 + 1}{x^2 + 2}$$

$$\frac{d}{dx} e$$

$$\frac{d}{dx} \log(1 + x^4)$$

$$\frac{d}{dx} e^{x \log x}$$

$$\frac{d}{dx} e^{f(x) \log g(x)}$$

PARENTESI SULLE FUNZIONI DI 2 VARIABILI:

$$\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \in \Omega$$

$$f: \Omega \mapsto \mathbb{R}$$

$$f = f(x, y)$$

$$\text{dom}(f) = \Omega, \quad \text{im}(f) = f(\Omega) \subseteq \mathbb{R}$$

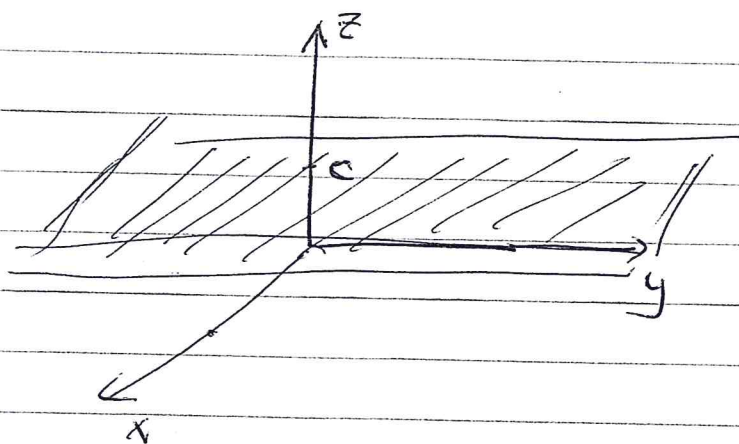
$$\text{graf}(f) = \{ (x, y, z) \in \Omega \times \mathbb{R}; z = f(x, y) \}$$

è una superficie in  $\mathbb{R}^3$  (e non più una

curva nel piano, come accadeva per le funzioni

di 1 variabile reale)

Es. sempre sempre:  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \cos t$



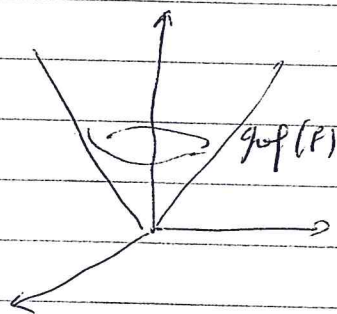
$$f(x, y) = x \quad (\text{non dip. da } y)$$

$$f(x, y) = y \quad (\text{non dip. da } x)$$

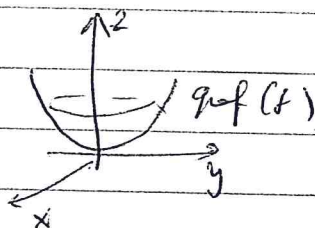
$$f(x, y) = x + y$$

Trovare una grafico approssimativo di queste tre funzioni.

$$f(x, y) = |(x, y)| = \sqrt{x^2 + y^2}$$



$$f(x, y) = x^2 + y^2$$



Def Sia  $z_0 \in \Omega$ ,  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  è detta continua in  $z_0$  se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \quad \forall z \in \Omega, \quad |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$$

Identica def. al caso di una variabile, dove per  $|z - z_0|$  indica la norma del vettore  $z - z_0$  dove  $z \in \mathbb{R}^2$  spesso si indica

Nota La norma  $\|v\|$ , noi la indichiamo  $|v|$



Df si dice che  $f$  ammette derivata

per tale  $(x_0, y_0) \in \Omega$  rispetto a  $x$ ,

$$\text{se } \exists \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \in \mathbb{R}$$

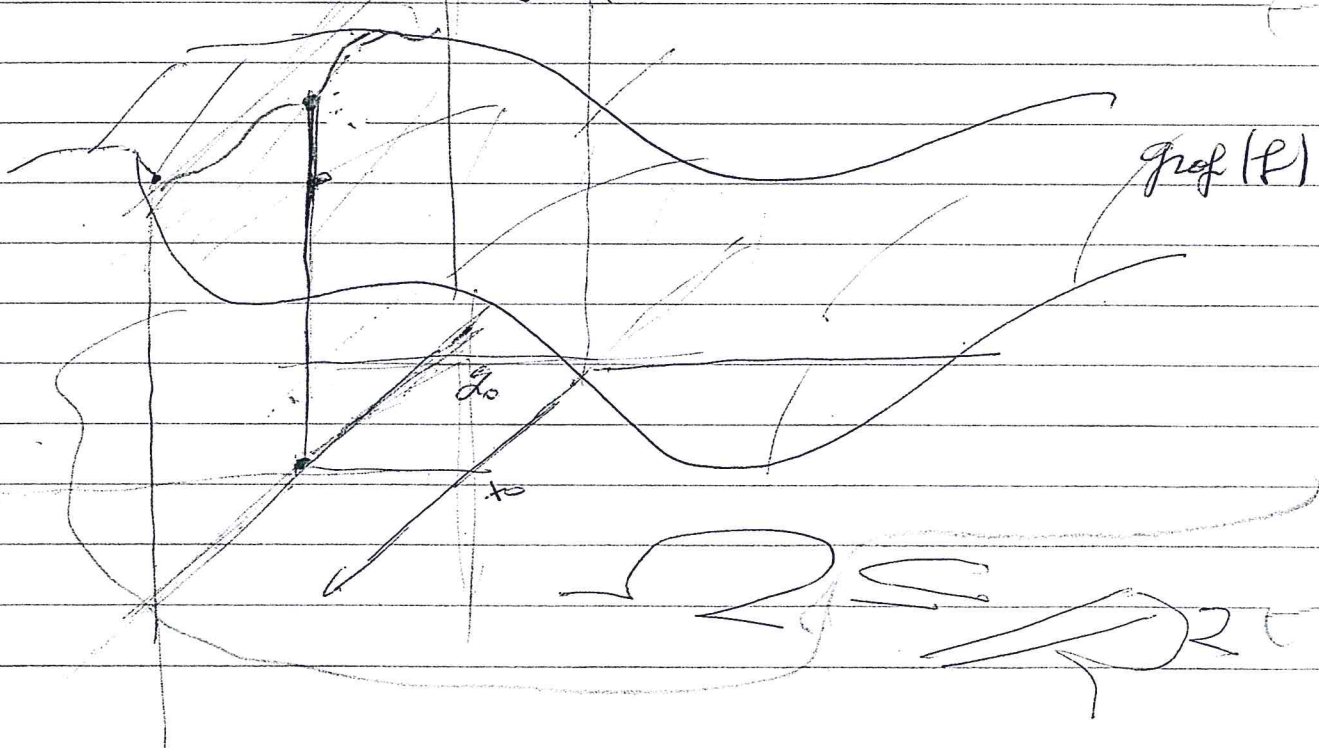
il

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \stackrel{\text{not}}{=} f'_x(x_0, y_0)$$

Analog. rispetto a  $y$

$$\text{se } \exists \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(x_0, y_0+h) - f(x_0, y_0)}{h} \in \mathbb{R}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0)$$



10

Per calcolare  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ ,  $y$  si pensa  
come costante, e si deriva solo rispetto a  $x$ .

Per calcolare  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ ,  $x$  si pensa  
come costante, e si deriva solo rispetto a  $y$ .

Esempio  $f(x, y) = x^2 + y^2 + 3xy + 1$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + 3y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y + 3x$$

$$f(x, y) = e^{x^2 + y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = e^{x^2 + y} \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y)$$

$$= 2xe^{x^2 + y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = e^{x^2 + y} \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y) = e^{x^2 + y}$$

Def 26.10.1. Se  $f$  ammette derivate parziali  
in  $z_0 \in \Omega$ ,  $z_0 = (x_0, y_0)$ , il gradiente  
di  $f$  in  $z_0$  è definito come:

$$\nabla f(x_0, y_0) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)$$

Es Calcolare il gradiente di

$$f(x,y) = \sin x + \sin y + \lg(xy)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cos x + \left[1 + (\lg(xy))^2\right] y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \cos y + \left[1 + (\lg(xy))^2\right] x$$

$$\nabla f(x,y) = \left( \cos x + y(1 + \lg(xy)^2), \cos y + (1 + \lg(xy)^2)x \right)$$



Torniamo alle funzioni di 1 variabile reali.

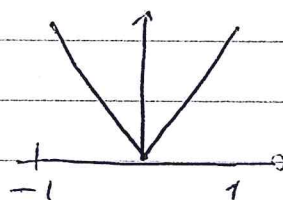
Def 24.12.1 ha  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ .  
MASSIMO

$x_0 \in [a, b]$  si dice punto di minimo di  $f$   
 (o anche minimo assoluto, o anche minimo  
 globale) se

$$f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in [a, b].$$

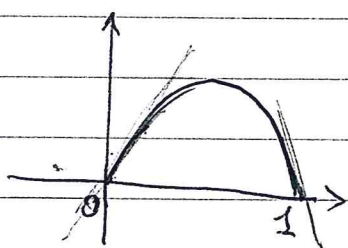
Sappiamo che non tutte le funzioni ammettono minimo; sappiamo però che se  $f$  è continua ammette minimo.

Come si trovano i minimi?



1<sup>a</sup> Difficoltà se voglio usare le derivate: per succedere di una funzione (continua) non ho derivabile tutto nel posto di minimo.

2<sup>a</sup> Difficoltà ipotizzando che  $f$  ha derivate:



$$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

