

Lezione 23

20/11/2019

9-13

Calcolo di alcune derivate.

Se $f(x) = \text{costante}$, $f'(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

e $f(x) = x$, $f'(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Esercizio: 23.1.1. siano $f, g: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$x_0 \in I$, f, g derivabili in x_0 . Allora

$f \cdot g$ è derivabile in x_0

$f + g$ è derivabile in x_0

e si ha

$$(23.1.1) \quad (fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

Dim (23.1.1):
$$\frac{(fg)(x) - (fg)(x_0)}{x - x_0} \quad \forall x \in I \setminus \{x_0\}$$

$$= \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \frac{f(x)(g(x) - g(x_0))}{x - x_0} + \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0}$$

$$= f(x) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} + g(x_0) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Dalla Prop 22.6.1 e dall'ipotesi che f è derivabile in x_0 , segue che f è continua in x_0 , e dunque

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Però, essendo la ipotesi g derivabile in x_0 ,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(f(x) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right) = f(x_0) g'(x_0)$$

Più facilmente (ma inutilmente)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(g(x_0) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) = g(x_0) f'(x_0),$$

Dunque $\exists$ $\lim_{x \rightarrow x_0}$ del membro destro dell'ultima formula a pag 1, ed è uguale a $f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0)$.

Ne segue la tesi.

A cosa vedere che $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.

Consequenza: se $f(x) = ax + b$ allora $f'(x) = a \quad \forall x \in \mathbb{R}$ □

Esercizio 23.3.1

$(n \in \mathbb{N})$

sia $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

un polinomio di grado n a coefficienti reali

Dato che $\dots$ (per induzione) $\left(\sum_{i=1}^n \dots\right)'$

$$= \sum_{i=1}^n (\dots)' \quad (\text{se } \dots \text{ è derivabile})$$

mi basta sapere derivare

$$a_n x^n$$

e per fare questo mi basta sapere derivare

$$x^n$$

Dico che

$$(23.3.1) \quad (x^n)' = n x^{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

lo dimostreremo per induzione su $n \in \mathbb{N}$.

$$n=1 \quad 1 \quad = \quad 1 \quad \text{si}$$

Per dimostrare la (23.3.1) per $n \geq 2$, suppongo

che questo sia falso, $\exists m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$ tale che

la (23.3.1) è falsa. Prendo il minimo degli $m \geq 2$ per cui la (23.3.1) è falsa (tale minimo esiste poiché $\mathbb{N}$ è bene ordinato); sia $p \in \mathbb{N}$

$p \geq 2$ tale minimo.

Considero $v-1$; $v-1 \in \mathbb{N}$, e

$v-1 \geq 1$; dato che $v-1 < v$ si ha

$$(x^{v-1})' = (v-1)x^{v-2} \quad (23.4.1)$$

Ma $x^v = x x^{v-1}$, e dunque

$$\begin{aligned} (x^v)' &= (x x^{v-1})' \stackrel{(23.1.1)}{=} x^{v-1} + x (v-1)x^{v-2} \\ &= x^{v-1} + (v-1)x^{v-1} \\ &= vx^{v-1} \end{aligned}$$

E dunque la (23.3.1) viene vera per v ,
assunto.

□

Esercizio 23.4.1 Sia $f: I \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ derivabile

in $x_0 \in I$; allora $\frac{1}{f}$ è derivabile in x_0
e si ha

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = \frac{-f'(x_0)}{(f(x_0))^2}$$

Dimi

$$\frac{\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x_0)}}{x - x_0} = \frac{f(x_0) - f(x)}{f(x)f(x_0)(x - x_0)} \quad \forall x \in I \setminus \{x_0\}$$

Dimo

$$\text{su } I \setminus \{x_0\}, \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x_0)}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x_0) - f(x)}{x - x_0} \cdot \frac{1}{(f(x)f(x_0))} \right)$$

$$= -f'(x_0) \frac{1}{(f(x_0))^2}$$

uso anche che f è continua in x_0 .

P

Esempio 23.5.1

derivare $x^{-5} = \frac{1}{x^5}$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = x^5, \quad \text{se } x \neq 0$$

si ha $(x^{-5})' = - \frac{5x^4}{x^{10}} = - \frac{5}{x^6}$

dato che $(x^5)' = 5x^4$ (dalla (23.3.1))

Nota se $x \neq 0$, la (23.3.1) vale

anche se $-n \in \mathbb{N}$

Più in generale, siano $f, g: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$g: I \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$, f, g derivabili in $x_0 \in I$.

Allora $\frac{f}{g}$ è derivabile in x_0 , e si ha

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

Diri

$$\frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x - x_0} = \frac{g(x)f(x) - f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)(x - x_0)}$$

$$= \frac{g(x_0)(f(x) - f(x_0)) + g(x_0)f(x_0) - f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0) \cdot (x - x_0)}$$

$$= \frac{g(x_0) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + f(x_0) \frac{g(x_0) - g(x)}{x - x_0}}{g(x)g(x_0)}$$

$x \rightarrow x_0$
für IV 2.1

$$\frac{g(x_0)f'(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

Querschnittsformel si ottiene anche partendo

$$\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}, \quad \text{in fatti}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)' \stackrel{(23.1.1)}{=} f' \cdot \frac{1}{g} + f \left(\frac{1}{g}\right)'$$

$$\stackrel{(23.4.1)}{=} \frac{f'}{g} + f \cdot \frac{-g'}{g^2}$$

$$= \frac{f'}{g} - \frac{g'f}{g^2} = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

□

Abbiamo scritto

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{su } I \setminus \{x_0\}$$

A volte la stessa cosa viene scritta come segue

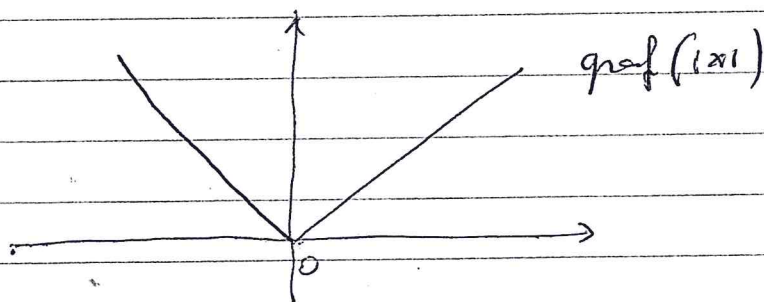
chiamando $h = x - x_0$,

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Nota In caso funzioni in cui

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} \quad \text{esiste } \in \mathbb{R}$$

una non derivabile:



$$h \neq 0, x_0 = 0 \quad \frac{|h| - |-h|}{2h} = 0$$

$\Rightarrow \exists \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{|h| - |-h|}{2h} = 0$, ma $|x|$ non è derivabile in 0.

Esempio $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(23.8.1) $\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall x \in \text{dom}(\arcsin)$

$\frac{d}{dx} \sinh x = \cosh x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\frac{d}{dx} \cosh x = \sinh x$

$\frac{d}{dx} \operatorname{arcsinh} x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

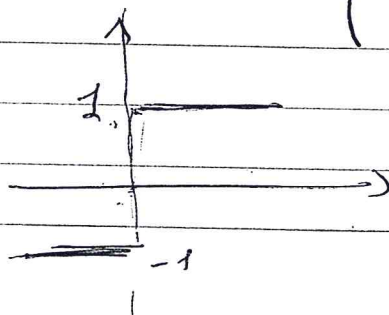
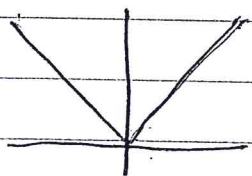
(23.8.2) $\frac{d}{dx} e^x = e^x$

Nota Vale sempre $\text{dom}(f') \subseteq \text{dom}(f)$

Esempio : $f(x) = |x|$, $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$
 $\text{dom}(f') = \mathbb{R} \setminus \{0\} \subsetneq \mathbb{R}$

Se $\text{dom}(f') = \text{dom}(f)$, questo vuol dire che f è derivabile in tutti i punti del suo dominio.

$\frac{d}{dx} |x| = \text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$



Mediamo come mai $\frac{d}{dx} \text{sen } x = \cos x$. Se $h \neq 0$

$$\frac{\text{sen}(x+h) - \text{sen}(x)}{h} = \frac{\text{sen } x \cosh + \cos x \text{sen } h - \text{sen } x}{h}$$

$$= \text{sen } x \underbrace{\left(\frac{\cosh - 1}{h} \right)}_{\downarrow h \rightarrow 0} + \cos x \underbrace{\frac{\text{sen } h}{h}}_{\downarrow h \rightarrow 0} = 1$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x+h) - \text{sen}(x)}{h} = \cos x.$$

Un conto: calcolare

$$\frac{d}{dx} \frac{(\text{sen } x)^2 \text{tg } h x}{e^x \cos x}$$

$$\frac{d}{dx} \left((\text{sen } x)^2 \text{tg } h x \right) \frac{e^x \cos x}{(e^x \cos x)^2}$$

$$= \frac{e^x \cos x \left(\frac{d}{dx} (\text{sen } x)^2 \text{tg } h x + (\text{sen } x)^2 \frac{d}{dx} \text{tg } h x \right) - (\text{sen } x)^2 \text{tg } h x \left(\frac{d}{dx} e^x \cos x + e^x \frac{d}{dx} \cos x \right)}{e^{2x} (\cos x)^2}$$

$$= \frac{e^x \cos x \left(\text{tg } h x \frac{d}{dx} (\text{sen } x)^2 + (\text{sen } x)^2 \frac{d}{dx} \text{tg } h x \right) - (\text{sen } x)^2 \text{tg } h x \left(\cos x \frac{d}{dx} e^x + e^x \frac{d}{dx} \cos x \right)}{e^{2x} (\cos x)^2}$$

$$\frac{d}{dx} (\text{sen } x)^2 = \cos x \cdot \text{sen } x + \text{sen } x \cos x = 2 \text{sen } x \cos x$$

$$e^x \cosh x \left(2 \sinh x \cosh x \tanh x + (\sinh x)^2 (1 - (\tanh x)^2) - (\sinh x)^2 \tanh x (e^x \cosh x - e^x \sinh x) \right)$$

$$e^{2x} (\cosh x)^2$$

Calcolo $\frac{d}{dx} \frac{x^4 + x^3 + 3x}{x^6 + 1}$

$$= \frac{(4x^3 + 3x^2 + 3)(x^6 + 1) - (x^4 + x^3 + 3x)6x^5}{(x^6 + 1)^2}$$

osservazioni legate alle equazioni differenziali:

la funzione $f(x) = e^x$ verifica $f' = f$

la funzione $f(x) = \sinh x$ verifica $f'' = f$

la funzione $f(x) = \cosh x$ verifica $f'' = f$

la funzione $f(x) = \tanh x$ verifica $f' = 1 - f^2$

la funzione $f(x) = \coth x$ verifica $f' = 1 - f^2$

la funzione $f(x) = \sinh x$ verifica $f'' = f$

la funzione $f(x) = \cosh x$ verifica $f'' = f$

Mentre fino a adesso abbiamo usato le
 proprietà semplici dei limiti e fatti algebrici,
 molto più difficili sono le domande relative
 alla derivata della funzione inversa, e alla
 derivata della composizione di funzioni.

ES 23.11.1 (CASA) Siano $f, g: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 derivabili n -volte. Dimostrare che

$$(f \circ g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

Teo 23.11.1 Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$,

supponiamo $f([a, b]) = [c, d]$

f invertibile.

f derivabile in $x_0 \in [a, b]$

$$f'(x_0) \neq 0$$

Sia $g: [c, d] \rightarrow [a, b]$ l'inversa di f

Sia $y_0 = f(x_0)$, e supponiamo g continua

in y_0 . Allora g è derivabile in y_0 e

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

(23.11.1)

Alcuni commenti: la (23.11.1) dice

$$g'(y_0) = \frac{d}{dy} g(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{\frac{d}{dx} f}$$

con $y_0 = f(x_0)$ Dunque

$$g'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Anche $x_0 = g(y_0)$, dunque

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(g(y_0))}$$

Esercizio 23.12.1 Calcolare

$$\frac{d}{dy} \arctan y$$

in un punto $y = f(x) = \tan x$ dove

tutte le ipotesi del teorema siano verificate

$$\frac{d}{dy} \arctan y = \frac{1}{\frac{d}{dx} \tan x} \quad \text{dove } y = \tan x$$

$$= \frac{1}{1 + (\tan x)^2} = \frac{1}{1 + (\tan(\arctan(y)))^2}, \quad x = \arctan y$$

$$= \frac{1}{1 + y^2}$$

$$\frac{d}{dx} \log x = \frac{1}{\frac{d}{dy} e^y}, \text{ con } e^y = x \quad \forall x > 0$$

$$= \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}$$

Per caso

$$\frac{d}{dx} x^{1/2}$$

$$\frac{d}{dx} x^{1/3}$$

che tutto è
ben definito.

$$\frac{d}{dx} \left(\operatorname{tgh}^{-1}(x) \right) = \frac{1}{\frac{d}{dy} \operatorname{tgh}(y)}, \quad \operatorname{tgh} y = x$$

$$= \frac{1}{1 - (\operatorname{tgh}(y))^2} = \frac{1}{1 - x^2}$$

Esercizio 23.13.1

$$\frac{d}{dx} \frac{\log x}{\operatorname{arctg} x} = \frac{\frac{1}{x} \operatorname{arctg} x - \frac{\log x}{1+x^2}}{(\operatorname{arctg} x)^2}$$

Ancora non possiamo fare derivate di funzioni composte.

14

Dim (eo. 23.11.1) Sia $R: [a,b] \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$

la funzione definita come segue:

$$R(x) = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} \quad \forall x \in [a,b] \setminus \{x_0\}$$

Mostrare che $f(x) \neq f(x_0) \quad \forall x \in [a,b] \setminus \{x_0\}$

Infatti f per ipotesi è iniettiva, dunque

se $x \neq x_0$ sono due punti di dom $f|_{[a,b]}$

tra loro diversi, allora $f(x) \neq f(x_0)$.

Come ottengo il rapporto incrementale di g ?

Esso è
$$\frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = R(g(y))$$

Infatti
$$R(g(y)) = \frac{g(y) - x_0}{f(g(y)) - f(x_0)} = \frac{g(y) - g(y_0)}{f(g(y)) - f(x_0)} \quad \begin{matrix} \uparrow \\ x_0 = g(y_0) \end{matrix}$$

Devo calcolare

$$\lim_{y \rightarrow y_0} R(g(y)) \quad \text{su } [c,d] \setminus \{y_0\}.$$

Usando il Lemma 19.2.1 (di composizione), notiamo
 $\lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = g(y_0)$, poiché per ipotesi g
è continua in y_0 .

Esercizio:

Sia $E \subseteq \mathbb{R}$, $\bar{x} \in \bar{E}$, $l \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = l \quad \text{in } E$$

Sia $\varphi: L \subseteq f(E) \rightarrow \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{y \rightarrow l} \varphi(y) = q \quad \text{in } L.$$

Allora

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \varphi(f(x)) = q \quad \text{in } E$$

Da questo segue

in $[c, d] \setminus \{y_0\}$,

$$\exists \lim_{y \rightarrow y_0} R(g(y)) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{y - y_0}{f(x) - f(x_0)} \quad \text{in } [c, d] \setminus \{y_0\}$$

$$= \frac{1}{f'(x_0)}$$

$$\varphi \longleftrightarrow R$$

$$x \longleftrightarrow y$$

$$q \longleftrightarrow \frac{1}{f'(x_0)}$$

Regola

$$g(f(x))' = g'(f(x)) f'(x)$$

Esempio

$$f(x) = x^2 + 1, \quad f'(x) = 2x$$

Calcolare

$$g(y) = e^y; \quad g'(y) = e^y$$

$$g(f(x)) = e^{x^2+1} \Rightarrow \frac{d}{dx} g(f(x)) =$$

$$\frac{d}{dx} e^{x^2+1} = 2x e^{x^2+1}$$

$$f(x) = \sin(2x)$$

$$g(y) = \arctan(1+y)$$

$$h(z) = \log(1+z^3). \quad \text{Calcolare}$$

$$\frac{d}{dx} h(g(f(x))) = h'(g(f(x))) g'(f(x)) f'(x)$$

per la regola