

Lezione 22 19/11/19

9-11

Derivate di funzioni definite su intervalli

Def 22.1.1. Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, $x_0 \in I$.

Sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. Si dice che f è
derivabile in x_0 se

(22.1.1) $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}$ su $I \setminus \{x_0\}$

Si dice che f è derivabile in I se f
è derivabile in ogni punto di I .

ESS 22.1.1 $I = (a, b)$, $I = [a, b]$, $I = \mathbb{R}$ ecc.
(risp. $x = b$)

(i) se $I = [a, b]$, e $x_0 = a$ allora (22.1.1) è
il limite destro (resp. sinistro).

(ii)° Facevamo limiti su E qualsiasi sottoinsieme di $\mathbb{R}$,
qui $E = I \setminus \{x_0\}$

(ii)° In (22.1.1) si richiede esistenza del limite
FINITO.

Nota: $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ si chiama rapporto incre-
mentale di f in x_0

Riguardo a Oss. 22.1.1.(iii), se consideri

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^{1/3}, \quad x_0 = 0$$

Allora

$$\exists \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \notin \mathbb{R}$$

e dunque, secondo la Def. 22.1.1,

f NON è derivabile in 0,

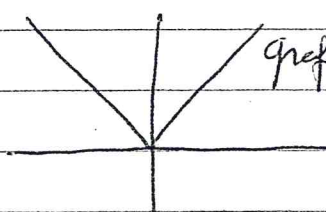
nonostante che il limite del rapporto incrementale esista.

$$\forall x \neq 0 \quad \frac{\sqrt[3]{x} - 0}{x} = \frac{x^{1/3}}{x} = x^{1/3 - 1} = \frac{1}{x^{2/3}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{2/3}} = +\infty \quad \text{su } \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

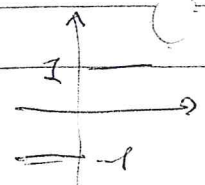
Es 22.2.1 Una funzione continua in x_0
ma non derivabile in x_0 :

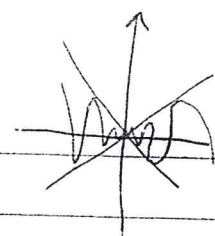
$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = |x|, \quad x_0 = 0$$



$$\text{graf}(f) \quad \nexists \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} \quad \text{su } \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$





ES 22.3.1

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

f è continua in 0 (noto)

? f è derivabile in 0? $\forall x \neq 0$ ha

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x \operatorname{sen} \frac{1}{x}}{x} = \operatorname{sen} \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \quad \text{in } \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

ES 22.3.2

Dimostrare che $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \operatorname{sen} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

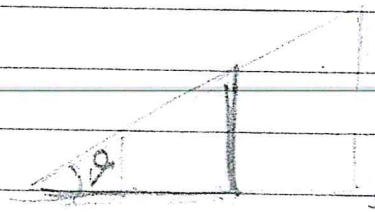
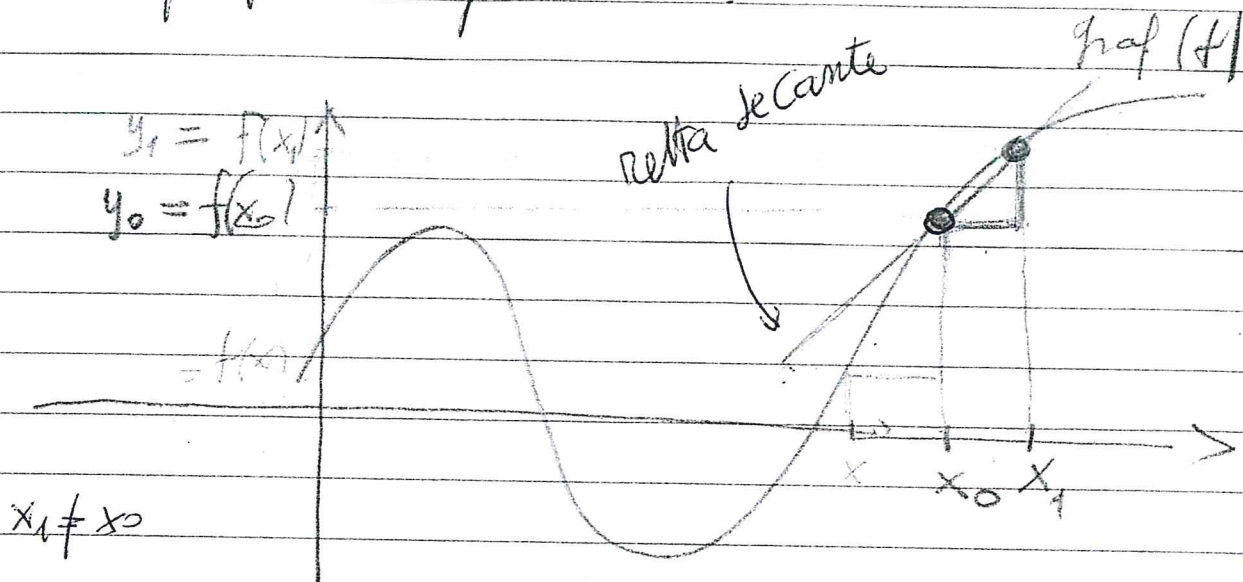
con $\alpha > 1$, f è derivabile in 0

con derivata nulla.

Notazioni: il limite nella (22.1.1) si chiama derivata di f in x_0 , e si indica con

$$f'(x_0), \quad \frac{df}{dx}(x_0), \quad \dot{f}(x_0)$$

Significato geometrico:



$$\operatorname{tg}(\theta) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

eq. Retta passante per $(x_0, f(x_0))$ e $(x_1, f(x_1))$

$$2.4.1) \quad y - f(x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} (x - x_0)$$

Come definire la retta tg al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$: prendo quella retta il cui coeff. angolare è (per definizione) il limite per $x_1 \rightarrow x_0$ (con $x_1 \neq x_0$) dei coefficienti angolari delle rette secanti (quando tale esiste finito)

Pensando al limite in (22.4.1) si

ottiene l'eq. della retta tg a $\text{graf}(f)$ in $(x_0, f(x_0))$

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

« $f'(x_0)$ è coeff. ang. retta tg a $\text{graf}(f)$ in $(x_0, f(x_0))$ »

ES 22.5.1 Trovare l'eq. della retta $\perp$ a $\text{graf}(f)$ in $(x_0, f(x_0))$

Definizione $\mathcal{C}(I) = \{f: I \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ continua in } I\}$

$$\mathcal{C}^1(I) = \{f \in \mathcal{C}(I) : \exists f' : I \rightarrow \mathbb{R}, f' \in \mathcal{C}(I)\}$$

$$\forall k \geq 2 \quad \mathcal{C}^k(I) = \{f \in \mathcal{C}^{k-1}(I) : \exists f^{(k)} : I \rightarrow \mathbb{R}, f^{(k)} \in \mathcal{C}(I)\}$$

= funzioni derivabili k volte in I con derivate continue su I

$$\mathcal{C}^\infty(I) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^k(I)$$

6

Es 22.6.1 (si trova l'esempio sul libro di

Prodi) Cercare una funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

derivabile ma non $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. (Per con)

In relazione all'es. 22.4.1, vale la

Prop 22.6.1 Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

$x_0 \in [a, b]$, f derivabile in x_0 .

Allora f è continua in x_0 .

Dim devo dimostrare che

(22.6.1) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ su $[a, b]$

è che $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}$ su $[a, b] \setminus \{x_0\}$

Perché $x_0 \in \overline{[a, b] \setminus \{x_0\}}$, si ha (per una

Es. 20.2.1

osservazione precedente) che

(22.6.1) $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ su $[a, b] \setminus \{x_0\}$

7

Il membro destro di questa ultima formula
 $(\Rightarrow) \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0 \quad \text{in } [a, b] \setminus \{x_0\}$

Scriviamo

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0)$$

la tesi diventa (dato che $x_0 \neq x$)

$$(22.7.1) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0) \right) = 0 \quad \text{in } [a, b] \setminus \{x_0\}$$

Dal lemma sul "limite del prodotto di due funzioni" =
 prodotto del limite delle 2 funzioni, purché non

capiti $0(+\infty)$ oppure $0(-\infty)$ $\gg$, segue che

il limite nella (22.7.1) è $0 = f'(x_0) \cdot 0$ (osserva-
 mo che $f'(x_0) \in \mathbb{R}$).

□