

Funzioni monotone.

Def 21.1.1 Sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $I \in \mathbb{R}$

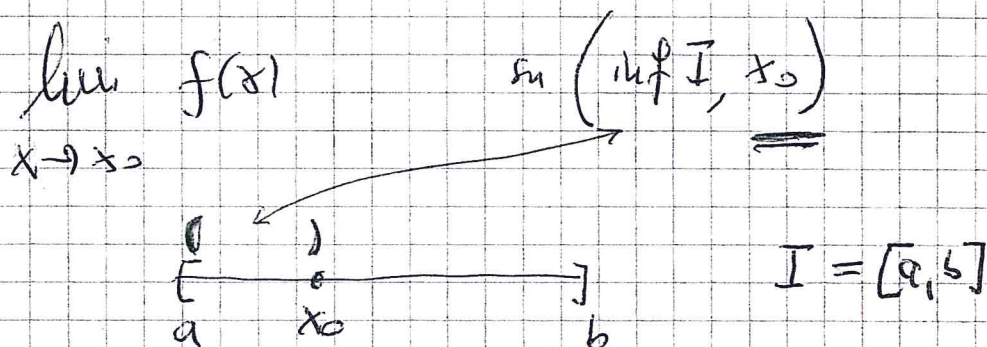
intervallo. Sia $x_0 \in I$ un punto

interno di I (cioè $\exists \rho > 0 : B_\rho(x_0) \subset I$)

Si definisce il limite sinistro di f in x_0 e si

indica $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$

il limite (e $\exists$)



e il limite destro di f in x_0 , e si indica

$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$,

parentesi tonda nell'estremo destro/sinistro

il limite (e $\exists$)

$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$

Nota: «analogamente, si può fare il limite sinistro nell'estremo destro»

Così come per le succ. monotone si ha

il Teo 9.9.1, vale il

(Teo fondamentale funzioni monotone)

Teo 21.2.1 Sia $f: E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ^{monotona crescente} ^{Supremum}

$$s := \sup E < +\infty \quad (21.2.1)$$

$$\sup f(E) < +\infty \quad (21.2.2)$$

$$s \notin E \quad (21.2.3)$$

$$\text{Allora } \exists \lim_{x \rightarrow s^-} f(x) \text{ su } E \quad (21.2.4)$$

$$\text{e tale limite} = \sup f(E) \quad (21.2.5)$$

Nota « L' enunciato si potrebbe dare anche

nel caso $\sup E = +\infty$, ^{in modo} ^{offerto}

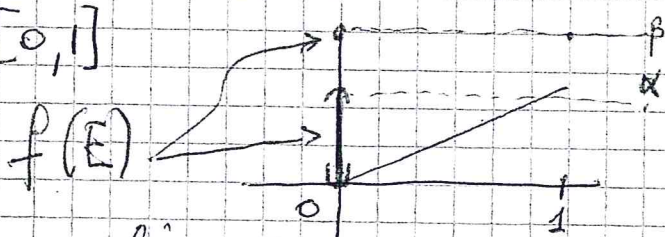
Teo 9.9.1, $E = \mathbb{N}$, non tenuto in teo 21.2.1

(ad esempio $\sup E = +\infty$). »

Es. 21.2.1

Es. Se $s \in E$, l' enunciato può essere falso!

$$E = [0, 1]$$



$$s = 1 \in E$$

$$\sup f(E) = \beta$$

$$= \max f(E)$$

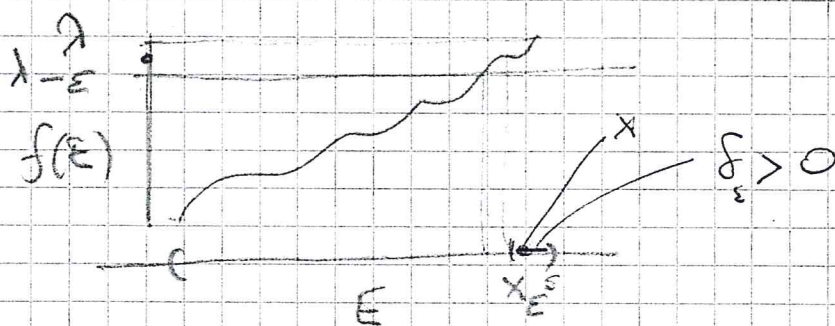
$\lim_{x \rightarrow s^-} f(x) = \alpha$ e la (21.2.5) è falsa

Definiamo $\lambda := \sup f(E) < +\infty$
 in ipotesi.

Per def. di estremo superiore,

$$1) \quad \lambda \geq f(x) \quad \forall x \in E$$

$$2) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_\varepsilon \in E : \quad f(x_\varepsilon) > \lambda - \varepsilon$$



Considero

$$s - x_\varepsilon =: \delta_\varepsilon \quad (21.3.1)$$

Dico che $\delta_\varepsilon > 0$: devo escludere il caso $x_\varepsilon = s$

Si, lo escludo perché $x_\varepsilon \in E$, e $s \notin E$.
 (21.2.3)

Potrei $s = \sup E$, $s \geq x_\varepsilon$, e $s \neq x_\varepsilon \Rightarrow s > x_\varepsilon$
 $\Rightarrow \delta_\varepsilon > 0$

Dico che vale:

$$\left. \begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0 \\ \text{se } x \in E \text{ e se } |x - s| < \delta_\varepsilon \text{ si ha} \\ |f(x) - \lambda| < \varepsilon, \end{array} \right\} \quad (21.3.2)$$

dove δ_ε è definito in (21.3.1).

La (21.3.2) dice che λ , definito come $\sup f(E)$, è il limite esiste di f

in $x \rightarrow s$. E questo concluderebbe.

Si tratta dunque di dimostrare la (21.3.2)

Prendiamo $\varepsilon > 0$, sia δ_ε come nella (21.3.1),

e supponiamo $x \in E$, $s - x < \delta_\varepsilon$

Demo dimostrare che

$$\lambda - \varepsilon < f(x) < \lambda + \varepsilon$$

La disuguaglianza

è ovvia, perché

$$\lambda = \sup f(E) \Rightarrow f(x) \leq \lambda < \lambda + \varepsilon$$

Per quanto riguarda la disuguaglianza

incontrante $x > x_\varepsilon$, e poiché

$$f \text{ è crescente} \quad f(x) \geq f(x_\varepsilon) > \lambda - \varepsilon$$

2) di f 3

ES 21.4.1 Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo,

$f: I \rightarrow \mathbb{R}$ crescente. Allora,

l'insieme $I^\circ = \{x \in I : x \text{ interno ad } I\}$,

$$S_f := \left\{ \hat{x} \in \overset{\circ}{I} : \lim_{x \rightarrow \hat{x}^-} f(x) < \lim_{x \rightarrow \hat{x}^+} f(x) \right\}$$

allora

1) S_f è al più numerabile

2) $\forall x \in \overset{\circ}{I} \setminus S_f$ f è
continua in x .

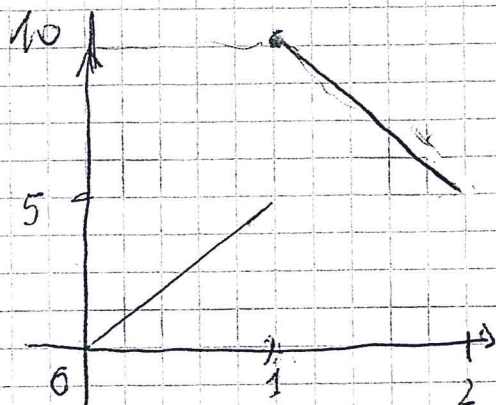
È lecito allora chiamare S_f l'insieme
dei punti di salto di f .

Ricordare anche es. 19.9.1, che si può
fare per le funzioni monotone.

Teo 21.5.1 (continuità delle funzioni monotone)
Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ^{crescente} monotona. Supponiamo
che f assuma tutti i valori compresi fra
 $f(a)$ e $f(b)$. Allora f è continua.

Oss 21.5.1 Se non sappiamo che f sia monotona,

vi sono controesempi al teorema 21.5.1. Infatti



f assume tutti i valori tra 0 e 10 (0 e 10 compresi)

$$f(1) = 10, \quad f(0) = 0,$$

$$f(2) = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 10$$

$$x \rightarrow 1^-$$

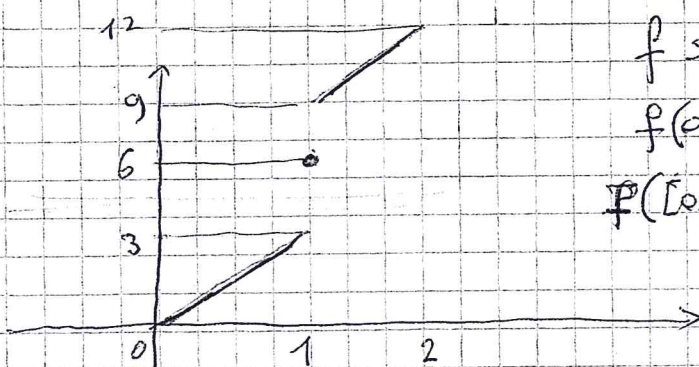
$f : [0, 2] \rightarrow [0, 10]$ intermedia
surgetura $\Rightarrow f$ invertibile
non monotona

f discontinua in 1

oss 21.5.1 Se f è monotona crescente ma

non assume tutti i valori compresi tra $f(a)$

e $f(b)$ in base controesempi al teo 21.5.1.



f strett. crescente

$$f(0) = 0, \quad f(2) = 12$$

$$P([0, 2]) = [0, 3) \cup \{6\}$$

$$\cup (9, 12]$$

f non assume tutti i valori tra 0 e 12 ed è discontinua

Dici
 Della stessa vista sui limiti
 (in particolare il Lemma 18.13.1 dell'unione)
 e usando la Def. 19.3.1,
 basta dimostrare che

$$\forall t \in [a, b) \quad \lim_{x \rightarrow t^+} f(x) = f(t) \quad (21.7.1)$$

$$\forall t \in (a, b] \quad \lim_{x \rightarrow t^-} f(x) = f(t) \quad (21.7.2)$$

« cioè che $\forall t \in (a, b)$, $f(t) = \lim_{x \rightarrow t} f(x)$ »
 (dato in $t = \lim_{x \rightarrow t} f(x)$)

Dimostriamo la (21.7.2), essendo la dim.
 della (21.7.1) analoga.

Dimostriamo che $\lim_{x \rightarrow t^-} f(x) \leq f(t)$ e che

$$\lim_{x \rightarrow t^-} f(x) \geq f(t).$$

Ricordiamo $\lim_{x \rightarrow t^-} f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x \rightarrow t^-} f(x)$ su $[a, t)$
 (cioè 21.2.1, (21.2.5))

$$= \sup \{ f(x) : x \in [a, t) \}$$

Ma $\forall x \in [a, t)$ ho $f(x) \leq f(t)$ perché f
 è crescente. Dunque $\sup \{ f(x) : x \in [a, t) \} \leq f(t)$

Dai Della lesua visha sui lumbi

17

(in particolare il Lemma 18.13.1 dell'unione)
e usando la Def. 19.3.1,
basta dimostrare che

$$\forall t \in [a, b) \quad \lim_{x \rightarrow t^+} f(x) = f(t) \quad (21.7.1)$$

$$\forall t \in (a, b] \quad \lim_{x \rightarrow t^-} f(x) = f(t) \quad (21.7.2)$$

« cioè che $\forall t \in (a, b)$, $f(t) = \lim_{x \rightarrow t} f(x)$ »
dette in $t = \lim_{x \rightarrow t} f(x)$ »

Dimostriamo la (21.7.1), essendo la dim.
della (21.7.2) analoga.

Dimostriamo che $\lim_{x \rightarrow t^+} f(x) \leq f(t)$ e che

$$\lim_{x \rightarrow t^-} f(x) \geq f(t).$$

$$\text{Ricordiamo } \lim_{x \rightarrow t^-} f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x \rightarrow t} f(x) \text{ su } [a, t)$$

teo 21.2.1, (21.2.5)

$$= \sup \{ f(x) : x \in [a, t) \}$$

Ma $\forall x \in [a, t)$ ho $f(x) \leq f(t)$ perché f
è crescente. Dunque $\sup \{ f(x) : x \in [a, t) \} \leq f(t)$

Perciò

$$\lim_{x \rightarrow t^-} f(x) \leq f(t).$$

Resto da dimostrare $\lim_{x \rightarrow t^-} f(x) \geq f(t)$.

Supponiamo in assurdo

$$\lim_{x \rightarrow t^-} f(x) < f(t)$$

Prendiamo λ compreso tra i due, cioè

$$\lim_{x \rightarrow t^-} f(x) < \lambda < f(t)$$

Se dimostro che λ non è un valore assunto allora ho concluso (dal teorema

21.5.1) Considero gli $x \in [a, t)$:

$$\text{si ha } f(x) \leq \sup_{[a, t)} f = \lim_{x \rightarrow t^-} f(x) < \lambda$$

Quindi in tutti gli x in $[a, t)$, $f(x)$

non può essere uguale a λ . Resto da

considerare $x \in [t, b)$; f essendo continua

è tale che $f(x) \geq f(t) > \lambda$. Dunque anche
in $x \in [t, b)$ $f(x) > \lambda$.

• Dunque λ non è un valore assunto da f , nonostante che $\lambda \in (f(a), f(b))$.

Assunto.

Teo 21.3.1 (monotonia delle funzioni invertibili)

• Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua e invertibile.

Allora f è o strettamente crescente o

strettamente decrescente.

Dm caso.

16

Teo 21.10.1 (Continuità della funzione inversa)

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ invertibile e continua.

Allora l'inversa di f è continua.

Dim Essendo f invertibile e continua,

dal Teo 21.9.1 f è o strett. crescente

o strett. decrescente. Supponiamo ad esempio

f strett. crescente. Allora

$$f: [a, b] \rightarrow [f(a), f(b)]$$

e la sua inversa $g: [f(a), f(b)] \rightarrow [a, b]$

Non è difficile vedere che anche g

è strettamente crescente. Inoltre g

assume tutti i valori compresi tra a e b .

Dal Teo 21.5.1 segue allora che g è continua. $\square$