

Lezione 20 5/11/19 9-11

1

Es 20.1.1. Sia $f: E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$x_0 \in E$. Supponiamo che x_0 ha

isolato. Allora f è continua in x_0

Cioè

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \quad \text{su } E \quad (20.1.1)$$

In fatti dal lemma di bolzano-we (lemma 19.1.1)

$$(20.1.1) \iff \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \quad \text{su } E \cap B_p(x_0)$$

Prendendo allora $p > 0$ in modo che

$$E \cap B_p(x_0) = \{x_0\}$$

(cosa che posso fare poiché x_0 è isolato),

si ha

$$(20.1.1) \iff \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \quad \text{su } \{x_0\}$$

che è sempre vera (controllare)

In esercizi da fare la nostra def di limit

con quella data di [AB], [C, S] ecc.

è il seguente.

ES 20.2.1 Sia $f: E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in E$
 $x_0 \in \overline{E \setminus \{x_0\}}$

Allora le due equivalenze

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \quad \text{in } E \quad (20.2.1)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \quad \text{in } E \setminus \{x_0\} \quad (20.2.2)$$

Implic. (20.2.1) $\Rightarrow$ (20.2.2) da lemma 18.12.1

di restrizione. Viceversa, se vale (20.2.2)

usiamo il lemma dell'unicità ^(lemma 18.13.1) e abbiamo

se vale (20.2.2) e se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ in $\{x_0\}$

allora vale (20.2.1), perché

$$E = (E \setminus \{x_0\}) \cup \{x_0\}.$$

ES 20.2.2. Siano funzioni continue i polinomi

$$q_0 + q_1 x + q_2 x^2 + \dots + q_n x^n,$$

sempre funzioni continue su x , $\cos x$, $\lg x$ (per lo stesso motivo)

e^x , $\sinh x$, $\cosh x$, $\tanh x$.

Def 2.3.1 ha $f: E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Continua in $x_0 \in E$, se $f: G \supseteq f(E) \rightarrow \mathbb{R}$

Continua in $y_0 := f(x_0) \in G$. Allora

$g \circ f$ è continua in x_0 .

Dim Applichiamo il lemma 19.2.1 con le

seguenti scelte: $\bar{x} = x_0$

$$l = f(x_0) = y_0$$

$$L = G$$

$$q = g(y_0)$$

Si deduce

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = g(y_0) = g(f(x_0))$$

Questo è ciò che $g \circ f$ è continua in x_0 . $\square$

A questo punto è $\lim_{x \rightarrow x_0}$ è continua, se (x, x^2, x^3) è continua ecc. ecc.; cioè per le continue molte altre funzioni continue per composizione.

Un esempio di funzione particolarmente strana era quella della funzione di Dirichlet. Più difficile

è il seguente esempio, legato a capire questi
fenomeni anche i punti di continuità di una funzione.

ES 20.4.1 (Una funzione continua solo sugli
irrazionali) ^{di $[0,1]$} sia $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{se } x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \cap [0,1], (m,n)=1 \\ 1 & \text{se } x = 0 \\ 0 & \text{se } (0,1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \end{cases}$$

Mostrare: • si riesce a costruire funzioni discontinue
in ogni punto;

funzioni discontinue
sui variabili (CASA)

ma non si riesce a costruire funzioni continue solo
sui variabili (molto difficile).

Teorema (di Weierstrass) 20.4.1 sia $K \subseteq \mathbb{R}$

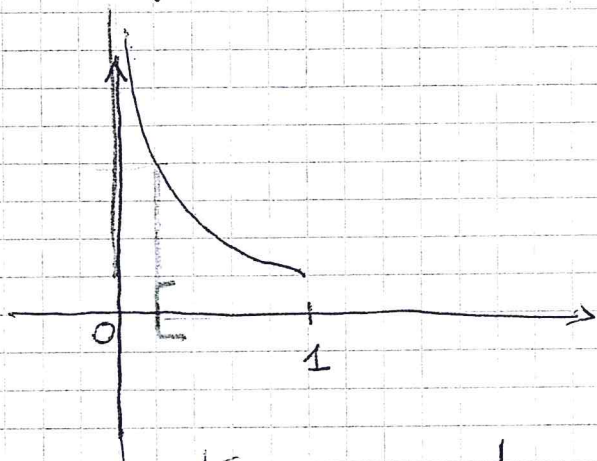
un compatto*. Sia $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ continua.

Allora $f(K)$ è limitata e f ammette
massimo e minimo su K .

* Ad esempio $K = [a,b]$ (dal teo di Bolzano
Weierstrass)

Ottimalità delle ipotesi:

$$\text{dom}(f) = (a, b] = (0, 1]$$



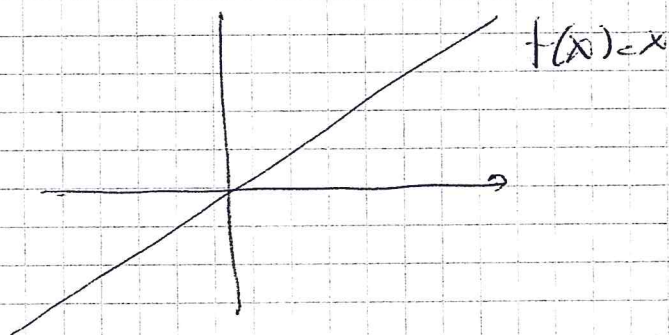
questa f è continua su $\text{dom}(f)$

ma $f(\text{dom}(f))$ non è limitato superiormente

f non ammette punto di massimo,

non ha valore massimo, $\sup f = +\infty$

Un altro esempio: $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$



f è continua su $\mathbb{R}$, ma $\text{Im}(f)$ non
è limitato (né inf. né sup.),
e non ammette né max/né min.

Dim. Cominciamo col dimostrare che $\text{Im}(f)$

è limitato. Se per assurdo $\text{Im}(f)$ non è limitato, allora non è limitato inferiormente oppure non è limitato superiormente. Supponiamo che non ha limitatezza superiormente (s.p.d.g.)

Allora $\exists (\lambda_n)$ successione di valori di f

$\lambda_n \rightarrow +\infty$. Ma λ_n è valore di f ,

quindi $\exists x_n \in K : \lambda_n = f(x_n)$.

Abbiamo dunque una successione $(x_n) \subset K$

per cui $f(x_n) = \lambda_n$. Ma K è compatto,

dunque $\exists (n_l)$ sotto successione di indici ed

$\frac{\exists x \in K}{\forall \mu}$ cui

$$x_{n_l} \xrightarrow{l \rightarrow +\infty} x$$

Essendo $x \in K$ e f continua in K ,

f è continua in x . Dunque

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} f(x_{n_l}) = f(x)$$

Ma

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} f(x_{n_l}) = \lim_{l \rightarrow +\infty} \lambda_{n_l} = +\infty$$

Ne segue $f(x) = +\infty$, essendo reali

f è a valori reali.

Donque $\text{Im}(f)$ è un insieme limitato di $\mathbb{R}$.

Resta da dimostrare che f ammette max e min su K ,

Dato che

$f(k)$ è limitato

si ha

$$M := \sup f(k) < +\infty$$

$$m := \inf f(k) > -\infty$$

La tesi del lemma: " f ammette massimo su K "

equivale a, cioè $M = \max f(k)$

cioè esiste il massimo valore di f ,

In tal caso, $\exists x_n \in K: f(x_n) = M$

(Per il minimo il ragionamento è analogo).

Per def di estremo inferiore, ...

$$(i) \quad \pi \geq \lambda \quad \forall \lambda \in f(K)$$

$$(ii) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists \lambda_n \in f(K) : \quad \pi - \frac{1}{n} < \lambda_n$$



$$\text{dunque } \exists x_n \in K : f(x_n) = \lambda_n$$

$$\text{Ne segue da } \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n \in K :$$

$$\pi - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq \pi$$

A cosa converge la successione $(f(x_n))$?

Per il confronto $f(x_n) \rightarrow \pi$.

D'altra parte, di nuovo, $(x_n) \subset K$. Dunque,

per lo K compatto, $\exists (n_j)$ successione

di indici, $\exists z \in K$:

$$x_{n_j} \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} z$$

$$f \text{ è continua in } z \Rightarrow f(x_{n_j}) \rightarrow f(z)$$

$$\text{Ma anche } f(x_{n_j}) \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} \pi. \text{ Dunque } f(z) = \pi$$

$$\text{Si conclude da } \exists z \in K : f(z) = \pi.$$

$$\text{Quindi val dire } \pi = \max f(K)$$



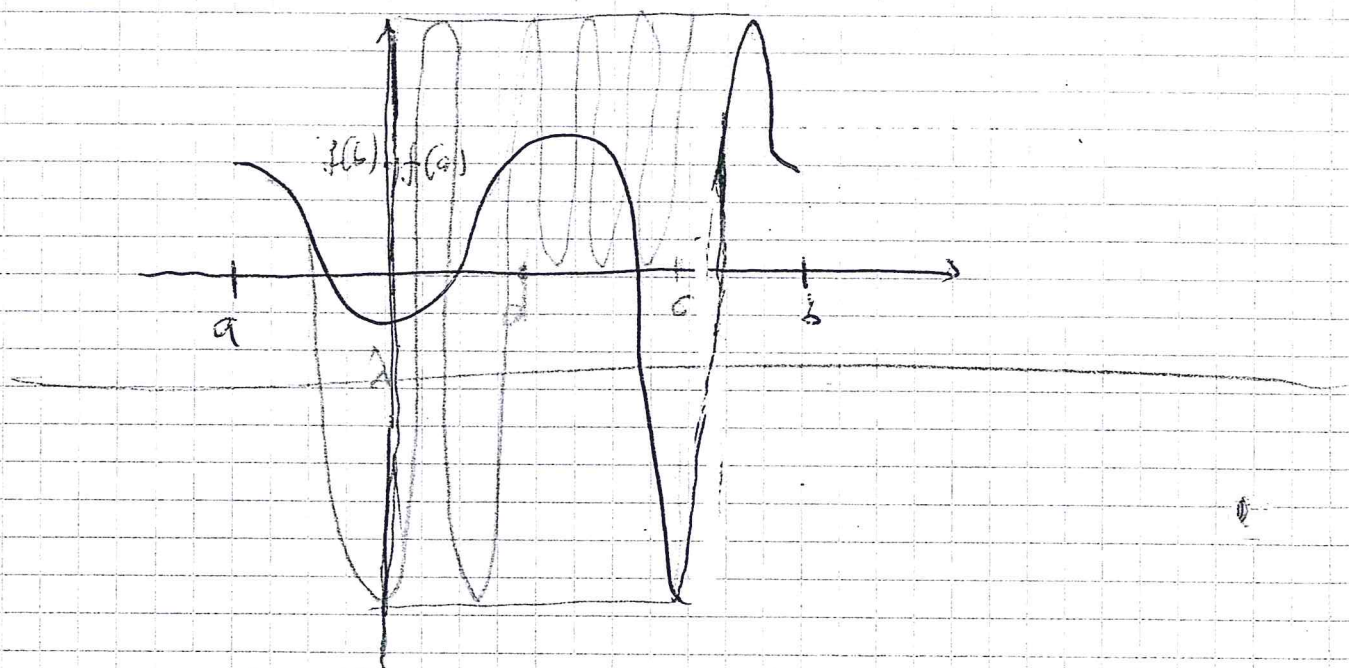
Domanda: « può l'immagine di un intervallo
 attraverso una funzione continua avere dei buchi »?
 la risposta è no

Teo 2.9.1 Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ($a, b \in \mathbb{R}$)

continua. Allora f assume tutti i valori

compresi tra il suo valore minimo

e il suo valore massimo.



oss 2.9.1 Esiste il valore minimo
 e massimo di f ? Per lo sto
 usando il teo. 2.4.1.

Dim Dal teo. 2.4.1. $\exists$ un punto di minimo
 di f , e un punto di massimo di f .

Sia $d \in [a, b]$, $c \in [a, b]$ $f(c) = \min f$, $f(d) = \max f$

S.p.d.g. l'otto numero $c \leq d$.

Quindi

$$a \leq c \leq d \leq b$$

$$f(c) = \min f$$

$$f(d) = \max f$$

Dobbiamo dimostrare che f assume

tutti i valori tra $f(c)$ e $f(d)$, cioè

dobbiamo dimostrare che:

$$\forall \lambda \in [f(c), f(d)] \quad \exists \xi \in [c, d]$$

$$\text{tale che } f(\xi) = \lambda.$$

Vi sono 2 casi:

1) $f(c) = f(d)$. In tal caso $f =$

costante $= f(c)$. In tal caso $\lambda = f(c)$ e
qualunque $x \in [c, d]$ è tale che $f(x) = \lambda$.

2) $f(c) < f(d)$; questo è il caso

interessante, in tal caso

$$a \leq c < d \leq b$$

Sia $\lambda \in (f(c), f(d))$

devo trovare $\xi \in (c, d)$ tale che $f(\xi) = \lambda$

Definiamo

$$E_\lambda := \{x \in [c, d] : f(x) < \lambda\}$$

$$\xi := \sup E_\lambda$$

La speranza è che ξ sia il punto che
cerco, cioè un punto di $[c, d]$ dove $f(\xi) = \lambda$.

Ma non saprei che $E_\lambda \neq \emptyset$: è vero

perché $c \in E_\lambda$, dato che $f(c) < \lambda$
(perché $\lambda \in (f(c), f(d))$).

Inoltre $E_\lambda \subset [c, d]$, dunque E_λ è
limitato, e poiché ξ è finito,
e $\xi \in [c, d]$. La tesi è

$$f(\xi) \leq \lambda \quad \text{e} \quad f(\xi) \geq \lambda$$

La def. di ξ dice che:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n \in E_\lambda : \xi \geq x_n > \xi - \frac{1}{n}$$

Risultato:

12

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n \in E_1: \quad \varepsilon \geq x_n > \varepsilon - \frac{1}{n}$$

$\uparrow$

mostrare che $f(x_n) < \lambda$ (12.1.1)

Dal teo del Cauchy $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \varepsilon$

Essendo f continua in ε $f(x_n) \rightarrow f(\varepsilon)$

Passando al limite nella (12.1.1) si ottiene

$$f(\varepsilon) \leq \lambda.$$

Resta da dimostrare $f(\varepsilon) \geq \lambda$.

Da $f(\varepsilon) \leq \lambda$, e dal fatto che $\lambda < f(d)$

segue $f(\varepsilon) < f(d)$, e dunque

$$\varepsilon < d.$$

Però $(\varepsilon, d]$ è un intervallo non vuoto.

Mostriamo che $\forall x \in (\varepsilon, d] \quad f(x) \geq \lambda$

Essendo f continua in ε , dal lemma di Weierstrass

$$f(\varepsilon) = \lim_{x \rightarrow \varepsilon} f(x) \quad \text{in } (\varepsilon, d]$$

Essendo $f(x) \geq \lambda \quad \forall x \in (\varepsilon, d]$, segue allora $\lim_{x \rightarrow \varepsilon} f(x) \geq \lambda$

Dunque $f(\varepsilon) \geq \lambda$

E) 20.13.1 (colabo approssimato di Newton)
 usando il teo precedente

Calcolare una funzione reale approssimata
 dell'equazione

$$x^5 + x - 7 = 0$$

a meno di un errore di $\frac{1}{10}$