

Lezione 1 9-11
Analisi Matematica 1

24/9/19

1

GIOVANNI BELLETTINI

BELLETTINI@DIIST.UNISI.IT

1) CECCONI - STAMPACCHIA Liguori Ed.
Analisi Mat. 1 (funzioni di 1 variabile)

1') Esercizi di Analisi 1 " " "

2) Acerbi - Battatto Pitagora Ed.
Elementi di Analisi Matematica

Notazioni: $\mathbb{N}$ = insieme dei numeri
naturali = $\{1, 2, 3, \dots\}$ insieme infinito

Se abbiamo bisogno dello zero scriviamo

$\mathbb{N} \cup \{0\}$; $\mathbb{Z}$ = insieme dei numeri interi;
 $\mathbb{Q} = \overset{\text{insieme dei}}{\text{numeri razionali}} = \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\};$

$\mathbb{R}$ = insieme dei numeri reali

Cominciamo con lo studio di $\mathbb{N}$,
e delle funzioni $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$
(cioè le successioni di numeri reali)

$\mathbb{N}$ è dotato di $\leq$, relazione
d'ordine, cioè un'operazione che
permette di confrontare due numeri naturali

1) $\leq$ è riflessiva $\forall n \in \mathbb{N} \quad n \leq n$

2) $\leq$ è transitiva $\forall n, m, p \in \mathbb{N}$
 $n \leq m, m \leq p \implies n \leq p$

3) $\leq$ è antisimmetrica; $\forall n, m \in \mathbb{N}$
 $n \leq m, m \leq n \implies n = m$

Proprietà 1 di $\mathbb{N}$ rispetto a $\leq$: La relazione
d'ordine $\leq$ è TOTALE, cioè

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}$ si ha $n \leq m$

oppure $m \leq n$

« TUTTI GLI ELEMENTI DI $\mathbb{N}$ SONO
CONFRONTABILI TRA LORO »

(NEL SENSO DI $\leq$)

3

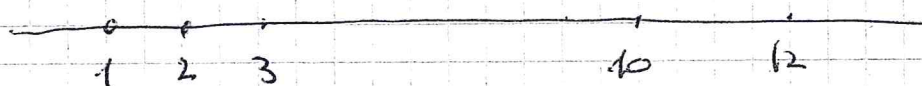
Proprietà 2) Buon ordinamento.

Def. 1.3.1 Sia $E \subseteq \mathbb{N}$, sia $m \in \mathbb{N}$.
Si dice che m è $\bigwedge_{m \leq n \in E} n$ minimo di E se

(i) $m \in E$

(ii) $\forall n \in E \quad n \geq m$

Nota $n < m$ se $n \leq m$ e $n \neq m$



Esercizio 1.3.1 m è unico, e si
chiama il minimo di E

Supponiamo m_1, m_2 due minimi di E

Devo dimostrare che $m_1 = m_2$

So che $m_1 \in E, m_2 \in E$

Ma m_1 è un minimo di $E \Rightarrow m_1 \leq m_2$

D'altra parte m_2 è un " " " $\Rightarrow m_2 \leq m_1$

$$\Rightarrow m_1 = m_2$$

Proprietà 2) $\mathbb{N}$ è bene ordinato, cioè

($\leq$ è totale e qualunque sottoinsieme

non vuoto di $\mathbb{N}$ ammette minimo)

4

Oss 1.4.1 È falso che qualunque sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{N}$ ammetta massimo elemento!

Oss 1.4.2 Se $\emptyset \neq E \subseteq \mathbb{N}$, E insieme finito, allora E ammette massimo (e minimo).

Grazie alla Proprietà 2), dato $n \in \mathbb{N}$, posso definire il successore, come

$$\min \{ m \in \mathbb{N} : m > n \} = n+1$$

Proprietà 3) ogni numero naturale ha un unico successore

Proprietà 4) ogni numero naturale > 1 è successore di un numero naturale.

Teo 1.4.1 (Principio di induzione)

Sia $E \subseteq \mathbb{N}$, tale che

(i) $1 \in E$ (in particolare $E \neq \emptyset$)

(ii) se $n \in E \Rightarrow n+1 \in E$

5

Dms Per assurdo, (1.4.1) sia falsa.

Allora $N \setminus E \neq \emptyset$

↑

(questo insieme si chiama complementare di E in N)

Perché $N \setminus E \neq \emptyset$ esso ammette il
minimo elemento, dunque uno m

$$m = \min N \setminus E$$

Dalle proprietà del minimo, $m \in N \setminus E$

dunque $\boxed{m \notin E}$ e per $m > 1$

(per la ipotesi i) $1 \in E$.

Dalle proprietà 4) $\exists ! k \in N$

tale che $m = k + 1$.

Nota che $k \notin N \setminus E$, per m è il
più piccolo degli elementi di $N \setminus E$,
e $k < m$. Allora $k \in E (= N \setminus (N \setminus E))$

L'ipotesi ii) $\Rightarrow k+1 \in E$. Per $k+1 = m$

$\Rightarrow \boxed{m \in E}$. Contraddizione.

□

versione difficile

Esercizio 1.6.1 ✓ $\forall n \in \mathbb{N}$ trovare

$$\sum_{j=1}^n j$$

versione "facile": il testo dice quanto deve fare il risultato, e si cerca di dimostrarlo per induzione.

versione "difficile": si dimostra direttamente una formula (scelta una dell'induzione)

Esercizio 1.6.1. versione facile. $\forall n \in \mathbb{N}$ dimostrare che

$$\sum_{j=1}^n j = \frac{n(n+1)}{2} \quad (1.6.1)$$

1 2 3 4 ... n-1 n

$$1 + n$$

$$2 + n-1 = n+1$$

$$3 + n-2 = n+1$$

⋮

n=7

$$\leadsto \frac{n(n+1)}{2}$$

n=6

$$\begin{matrix} 1+6 \\ 2+5 \end{matrix}$$

Lemma facile: applico induzione:

$$E = \left\{ n \in \mathbb{N} : \sum_{j=1}^n j = \frac{n(n+1)}{2} \right\}; \text{ per } E = \mathbb{N}$$

cioè devo dimostrare che gli $n \in \mathbb{N}$ veri

la formula (1.5.1) li vera sono tutti.

Devo verificare $E \in \mathbb{N}$ Sì

$1 \in E$?

$$\sum_{j=1}^1 j = \frac{1}{2} (1+1)$$

||

||

1

1

Sì

$n \in E \Rightarrow n+1 \in E$?

Supponiamo

$$\sum_{j=1}^n j = \frac{n(n+1)}{2} \quad (\text{ipotesi induttiva})$$

Devo dimostrare

$$\sum_{j=1}^{n+1} j = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Si ha

$$\sum_{j=1}^{n+1} j = \sum_{j=1}^n j + (n+1) = \text{da ind}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1) \left[\frac{n}{2} + 1 \right]$$

$$= (n+1) \frac{(n+2)}{2} \quad \text{si'}$$

Dal principio di induzione $\Rightarrow E = N$,
 cioè la (1.6.1) è valida $\forall n \in N$ $\square$

$\frac{n}{2} = n$ dispari

$\frac{n+1}{2}$ volte

$$\begin{array}{l} 1+7 \\ 2+6 \\ 3+5 \\ +4 \end{array} \quad \begin{array}{l} (n+1) \frac{(n-1)}{2} + \frac{n+1}{2} = \\ = \frac{(n+1)n}{2} \end{array}$$

ES 1.8.1 $\sqrt{\text{versione difficile}}$ Sia $x \in \mathbb{R}$, $n \in N$. trovare

$$\sum_{j=0}^n x^j = 1 + x + x^2 + \dots + x^n \quad (1.8.1)$$

espressione geometrica di ragione x

versione facile. Dimostrare $\sum_{j=0}^n x^j = \begin{cases} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} & \text{se } x \neq 1 \\ n+1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$

Per semplicità, possiamo

$$S_n = \sum_{j=0}^n x^j = 1 + x + x^2 + \dots + x^n \quad (1.9.1)$$

Moltiplicare per:

$$x S_n =$$

$$x + x^2 + x^3 + \dots + x^{n+1} \quad (1.9.2)$$

Faccio la differenza tra la (1.9.1) e la (1.9.2):

$$S_n - x S_n = 1 - x^{n+1}$$

||

$$(1-x) S_n$$

se $x \neq 1$ divido per $1-x$

$$\Rightarrow S_n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

Verificare facile:

$$E = \{n \in \mathbb{N} \cup \{0\} : (1.8.1) \text{ vale}\}$$

$$E \subseteq \mathbb{N} \cup \{0\} \quad \mathcal{H}$$

$$0 \in E ? \quad \text{si} \quad x^0 = 1 = 1$$

$$n \in E \Rightarrow n+1 \in E ? \quad (x \neq 1)$$

$$\text{if } 0 \in \mathcal{H} \quad \sum_{j=0}^n x^j = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

$$\text{per } \sum_{j=0}^{n+1} x^j = \frac{1-x^{n+2}}{1-x}$$

Si ha

12

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n+1} x^j &= \sum_{j=0}^n x^j + x^{n+1} \\ &= \frac{1-x^{n+1}}{1-x} + x^{n+1} \\ &= \frac{1-x^{n+1} + (1-x)x^{n+1}}{1-x} \\ &= \frac{1-x^{n+2}}{1-x}\end{aligned}$$

□

Es 1.10.1 Progressione aritmetico-geometrica; $x \in \mathbb{R}$

Sia $n \in \mathbb{N}$; trovare

$$1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1}$$

Per caso.

Es 1.10.2 Trovare la somma dei primi n numeri dispari.

Es 1.10.3

Trovare

$$\sum_{j=1}^n j^2 = 1 + 4 + 9 + \dots + n^2$$

Es 1.10.4 (teo di NiGmaro).

ES 1.11.1

« integration per parti »

11

formula di somma per parti:

$$\sum_{k=2}^n (A_k - A_{k-1}) b_k =$$

$$= - \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_{k+1} - b_k) + A_n b_n - A_1 b_1$$

« Ricorda

$$\int f' g = - \int f g' + [fg] \quad \gg$$