

Lezione 19 31/10/2019 9-11

Lemma 19.1.1 (LOCALIZATION) Sia $E \subseteq \mathbb{R}$

$\bar{x} \in \bar{E}$, $l \in \mathbb{R}$ (gli altri con loro simili), e

sia $p > 0$. Allora sono equivalenti:

(i) $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = l$ su E

(ii) $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = l$ su $E \cap B_p(\bar{x})$

« L'operazione di limite dipende solo da come è fatta la funzione nelle vicinanze di $\bar{x}$ »

$$B_p(\bar{x}) = (\bar{x} - p, \bar{x} + p)$$

Dim $\stackrel{(i)}{\Downarrow} \stackrel{(ii)}{\Downarrow}$ E evidente che se $\bar{x} \in \bar{E}$ allora

$$\bar{x} \in E \cap B_p(\bar{x}) \quad (\text{case})$$

Allora (ii) segue dal lemma di restrizione

(lemma 18.12.1), prendendo

$$S = E \cap B_p(\bar{x}).$$

(ii) $\Rightarrow$ (i). Ricordando il lemma 17.6.15 $\stackrel{(i)}{\Downarrow}$ mi

basta dimostrare che se $(x_n) \subset E$, $x_n \rightarrow \bar{x}$

allora $f(x_n) \rightarrow l$. Ma, se $x_n \rightarrow \bar{x}$ allora $x_n \in B_p(\bar{x})$ dunque

$$x_n \in S \quad \text{d.f. in } n$$

2

Dunque, di nuovo per il Lemma 17.6.1 (ii),
si ha $f(x_n) \rightarrow l$.

□

Il Lemma è difficile concettualmente e il quarto:

Lemma 19.2.1 (COMPOSIZIONE) Sia $E \subseteq \mathbb{R}$

$\bar{x} \in \bar{E}$, $l \in \mathbb{R}$ (gli altri casi sono simili),

e supponiamo

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = l \quad \text{su } E \quad (19.2.0)$$

Sia inoltre $g: L \supseteq f(E) \rightarrow \mathbb{R}$

Sia $q \in \mathbb{R}$, e supponiamo

$$\lim_{y \rightarrow l} g(y) = q \quad \text{su } L \quad (19.2.1)$$

Allora

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} g(f(x)) = q \quad \text{su } E \quad (19.2.2)$$

Nota Mi serve, per poter definire un teorema alla
(19.2.1), $l \in \bar{L}$: questo è automatico.
verificato, purché: $l \in \overline{f(E)} \subseteq \bar{L}$
oss 17.6.1

Dim Usiamo il lemma 17.6.1 (ii): dovendo mostrare la (19.2.2), si tratta dunque di vedere che $\kappa(x_n) \subset E$, $x_n \rightarrow \bar{x}$

$$\text{allora } g(f(x_n)) \rightarrow q$$

Vado a considerare $y_n := f(x_n) \in L$;

usando la (19.2.0) e ancora una volta il lemma 17.6.1 (ii), abbiamo che

$$y_n \rightarrow l.$$

Infine, da nuovo del lemma 17.6.1 (ii),

$$\text{segue } g(y_n) \rightarrow q. \quad \square$$

$$g(y_n) = g(f(x_n)).$$

FUNZIONI CONTINUE

Def 19.3.1 (CONTINUITÀ IN UN PUNTO)

Sia $f: E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in E$.

Direi che f è continua in x_0 se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \quad \text{in } \mathbb{R}$$

M.B. si richiede $x_0 \in \text{dom}(f)$ (e infatti allora $f(x_0)$)

Come decidere se f è continua in x_0 ? 6

Abbiamo il solito Lemma 17.6.1:

$$(i) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 : \quad \forall x \in E, \quad |x - x_0| < \delta_\varepsilon \\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

oppure

$$(ii) \quad \forall (x_n) \subset E, \quad x_n \rightarrow x_0 \\ \text{si ha } f(x_n) \rightarrow f(x_0)$$

∴ sappiamo che $(i) \Leftrightarrow (ii)$; di più la (ii) è più comoda.

Def 19.1 (CONTINUITÀ IN UN INSIEME)

Si sa $f: E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. f si dice continua in E se è continua in ogni punto $x \in E$.

Def 19.4.2. Si sa $f: E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in E$.

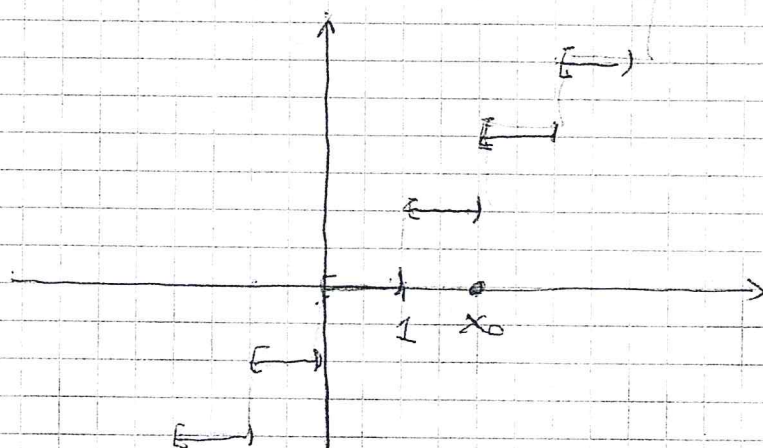
Si dice che f è discontinua in x_0 se f non è continua in x_0 .

Si dice che f è discontinua in E se f è discontinua in almeno un punto $x \in E$.

Esempio 19.7.1

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \lfloor x \rfloor = \min \{n \in \mathbb{Z} : n \geq x\}$$



f è continua in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$

f è discontinua in $\mathbb{Z}$

f è monotona ^{non} crescente

Def 19.7.1 Sia $f: E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

f si dice monotona non decrescente se

$$\forall x_1, x_2 \in E, x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

f si dice monotona strett. crescente se

$$\forall x_1, x_2 \in E, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Per cosa definire f non crescente e strett. decrescente

Come faccio a vedere che f è discontinua 8

in $x_0 \in \mathbb{Z}$:

$\exists (x_n) \subset \mathbb{R} \quad x_n \rightarrow x_0$ tale che
è falso che $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$

basta prendere $x_n = \begin{cases} x_0 - \frac{1}{n} & n \text{ pari} \\ x_0 + \frac{1}{n} & n \text{ dispari} \end{cases}$

In questo modo $f(x_n) = \begin{cases} x_0 - 1 & n \text{ pari} \\ x_0 & n \text{ dispari} \end{cases}$

Donque $(f(x_n))$ non converge.

Nota dire che $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ è falso
non dice che :

o $(f(x_n))$ converge a un limite $\neq f(x_0)$

oppure $(f(x_n))$ non ha limite.

ES 19.8.1 (FUNZIONE DI DIRICHLET)

Sia $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 1 & x \in [0,1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \end{cases}$$

Dimostrare che f è discontinua in
tutti i punti del suo dominio.

Sia infatti $x_0 \in [0, 1]$. Due suoi
 casi: $x_0 \in \mathbb{Q}$ oppure $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

1) $x_0 \in \mathbb{Q}$, $f(x_0) = 0$

Si fa la stessa dimostrazione di 2)

2) $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $f(x_0) = 1$. Del teo 3.10.1

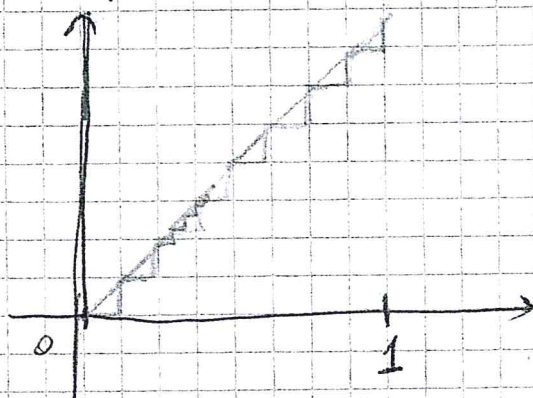
Sappiamo che $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$ è denso in $[0, 1]$.

In particolare, $\exists (q_n) \subset \mathbb{Q}$, $q_n \rightarrow x_0$

Abbiamo $f(q_n) = 0$, dunque $f(q_n) \rightarrow 0 \neq f(x_0)$

(e questo contraddice la caratterizzazione di
 continuità in x_0 per successioni)

Esempio 19.9.1 (Costruzione di una funzione limitata
 con ∞ punti di discontinuità numerabili in $[0, 1]$)



10
" Il grafico di f ha una
sola con infiniti gradienti, e dato che
che f ha limitata, $\sum_{\text{gradienti}} \text{ampiezza}(\text{gradienti}) < +\infty$ "

Per cosa.