

Lemma 17.6.1 ($(\epsilon, \delta) \longleftrightarrow$ sequential limits)

Sia $E \subseteq \mathbb{R}$, $\bar{x} \in \bar{E} \subseteq \mathbb{R}$ $p \in \mathbb{R}$

$f: E \rightarrow \mathbb{R}$

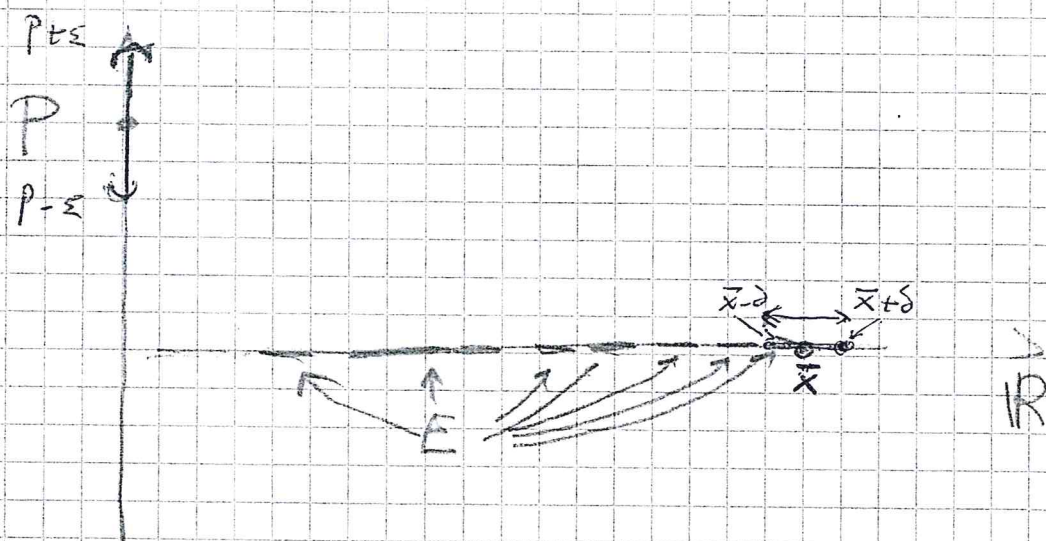
Sono equivalenti:

(i) $\forall \epsilon > 0 \exists \delta_\epsilon > 0: \forall x \in E$

$$|x - \bar{x}| < \delta_\epsilon \Rightarrow |f(x) - p| < \epsilon$$

(ii) $\forall (x_n) \subset E \quad x_n \rightarrow \bar{x}$

si ha $f(x_n) \rightarrow p$.



Oss 17.6.1. $\exists$ una succ. $(x_n) \subset E$, $x_n \rightarrow \bar{x}$

(dunque (ii) è una condizione non vuota)

dato che per ipotesi $\bar{x} \in \bar{E}$

$$f(E) \ni p$$

Indice: $f(E) \ni p$

$$(i) \Rightarrow (ii) \quad \text{Sia } (x_n) \subset E, \quad x_n \rightarrow \bar{x}$$

Devo dimostrare che $f(x_n) \rightarrow p$. Per ipotesi

$$\text{ho } \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0, \quad \forall x \in E \quad |x - \bar{x}| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - p| < \varepsilon$$

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} \text{Perché } x_n \rightarrow \bar{x}, \quad \forall \delta > 0 \quad \exists \bar{n}_\delta \in \mathbb{N}: \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad n > \bar{n}_\delta \quad |x_n - \bar{x}| < \delta \quad (x_n \in E) \end{array} \right.$$

Fissato $\varepsilon > 0$ prendo δ_ε dato da (i); lo utilizzo in (*), e ho dunque $\bar{n}_{\delta_\varepsilon} \in \mathbb{N}$
 per cui $\forall n > \bar{n}_{\delta_\varepsilon} \quad |x_n - \bar{x}| < \delta_\varepsilon$

Dunque dall'ipotesi (condizione $x_n \in E$) ottengo
 $|f(x_n) - p| < \varepsilon$

Le affermazioni sono equivalenti (in senso) significa esattamente che $f(x_n) \rightarrow p$.

$$(ii) \Rightarrow (i) \quad \text{cioè } \neg(i) \Rightarrow \neg(ii)$$

Per assurdo (i) sia falsa:

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x_\delta \in E \quad |x_\delta - \bar{x}| < \delta$$

$$|f(x_\delta) - p| \geq \varepsilon, \quad \text{In particolare}$$

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n \in E \quad |x_n - \bar{x}| < \frac{1}{n}$$

$$|f(x_n) - p| \geq \varepsilon. \quad \text{con } \delta = \frac{1}{n}$$

Ho trovato una successione $(x_n) \subset E$, e $x_n \rightarrow \bar{x}$,

Dueque $(f(x_n))$ non ha limite a p.

3

E allora ho che (ii) è falsa. $\square$

Differenze con la def. STANDARD

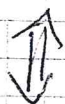
Def. 18.3.1 Sia $x_0 \in \mathbb{R}$, $E \subseteq \mathbb{R}$.

x_0 si dice di accumulazione per E

$$x_0 \text{ -- } \exists (x_n) \subset E, x_n \neq x_0, x_n \rightarrow x_0$$

$$\text{acc}(E) := \{ x_0 \in \mathbb{R}; x_0 \text{ di acc. per } E \}$$

$$\underline{\text{ES}} \quad x_0 \in \text{acc}(E)$$



$$x_0 \in \overline{E \setminus \{x_0\}}$$

Es. 17.2.1 x_0 è isolato $\Leftrightarrow x_0 \notin \text{acc}(E)$.

I testi di libro suggeriscono $\bar{x} \in \text{acc}(E)$,

così non fanno più $f(t)$ quando $x \rightarrow \bar{x}$

$\bar{x}$ è isolato, mentre noi possiamo farlo
(anche se è un caso poco interessante).

Inoltre consideriamo $0 < |x - \bar{x}| < \delta$

$\uparrow$
dalla scelta

Coni mancanti: $\ll p = \pm \infty, \quad \bar{x} = \pm \infty \gg$

1) $\bar{x} \in \mathbb{R}, \quad p = +\infty$:

$f: E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \bar{x} \in \bar{E};$ dico che
 $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = +\infty$ su E e

valg. una delle due seguenti equivalenti

proprietà:

(i) $\forall K \in \mathbb{R} \quad \exists \delta_K > 0 : \forall x \in E,$
 $|x - \bar{x}| < \delta_K \Rightarrow f(x) > K$

(ii) $\forall (x_n) \subset E, \quad x_n \rightarrow \bar{x} \quad f(x_n) \rightarrow +\infty$

2) $\bar{x} \in \mathbb{R}, \quad p = -\infty$

$f: E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \bar{x} \in \bar{E},$ dico che

$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = -\infty$ su E e

vale una delle due seguenti equiv.

proprietà:

(i) $\forall k \in \mathbb{R} \quad \exists \delta_k > 0 : \forall x \in E$

$|x - \bar{x}| < \delta_k \Rightarrow f(x) < k$

(ii) $\forall (x_n) \subset E, \quad x_n \rightarrow \bar{x} \quad f(x_n) \rightarrow -\infty$

Esistono capitoli 18.4.1. Scrivere i casi mancanti.

ES 18.5.1.

Il limite, $\exists$, è unico.

8

PER CASA -

ES 18.5.2.

Come fare a ottenere la

10

definizione di limite di una successione
a partire dalle definizioni di limite standard
opp.

Tra i casi mancanti dell'es. 18.4.1
manca ad esempio $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = p$

Def 18.5.1 Sia $f: E \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
 $p \in \mathbb{R}$

Supponiamo che $\exists (x_n) \subset E, x_n \rightarrow +\infty$.

Dico che

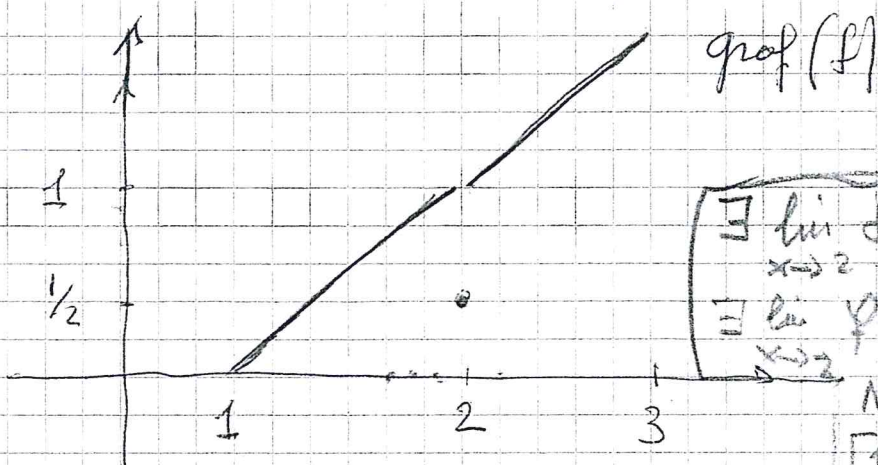
$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = p$ in E

è vale una delle due seguenti equiv. prop: 11

i) $\forall \varepsilon > 0 \exists \lambda \in \mathbb{R}: \forall x \in E, x > \lambda$
 $|f(x) - p| < \varepsilon$

ii) $\forall (x_n) \subset E, x_n \rightarrow +\infty, f(x_n) \rightarrow p$

ES (conceitualmente simples) 18.6.1



$$\begin{aligned} \exists \lim_{x \rightarrow 2} f(x) &= 1 \text{ em } [1, 2) \\ \exists \lim_{x \rightarrow 2} f(x) &= 1 \text{ em } (2, 3] \end{aligned}$$

NOTA

$$[1, 3] \setminus \{2\} = [1, 2) \cup (2, 3]$$

$$E = [1, 3]$$

$$\bar{x} = 2 \in E \subseteq \bar{E}, \text{ ou seja } E = \bar{E} \text{ Segundo}$$

$$[CS]_{AB} \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$$

$$\text{em } [1, 3]$$

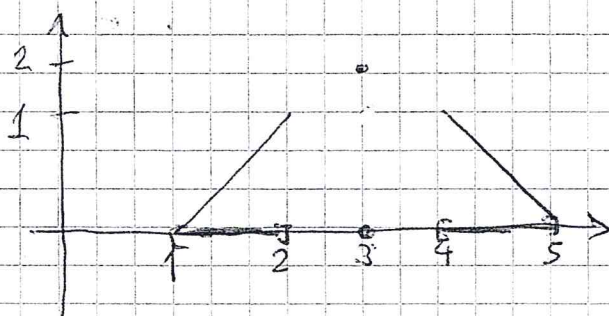
$$[NO] \nexists \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

$$\text{em } [1, 3]$$

$$[NO] \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$$

$$\text{em } [1, 3] \setminus \{2\}$$

ES 18.6.2



$$E = [1, 2] \cup \{3\} \cup [4, 5]$$

[CS, AB]

$\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ não é contínuo, pois 3 não é do acc. de E

$$[NO] \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 2$$

$$3 \in E \subset \bar{E}$$

ES 18.3.1 (CASA)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1 \quad \text{su } (-1, +\infty) \setminus \{0\}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad \text{su } \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad \text{su } (0, +\infty)$$

Come regolarsi per $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} (f(x) + g(x))$,

e analogamente per le differenze, i prodotti e i quozienti.

Siano $f: E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g: F \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$\bar{x} \in \bar{E} \cap \bar{F}$. Allora

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) + \lim_{x \rightarrow \bar{x}} g(x) \quad \text{su } E \cap F$$

perché $\exists \lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x)$ su E , $\exists \lim_{x \rightarrow \bar{x}} g(x)$ su F

e non si verificano i casi $+\infty - \infty$

Si dimostra usando (ii) Lemma 17.5.1, dato che l'analogia proprietà è vera per i limiti di successione.

ES Cara 18.9.1

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, d \in \mathbb{R}$$

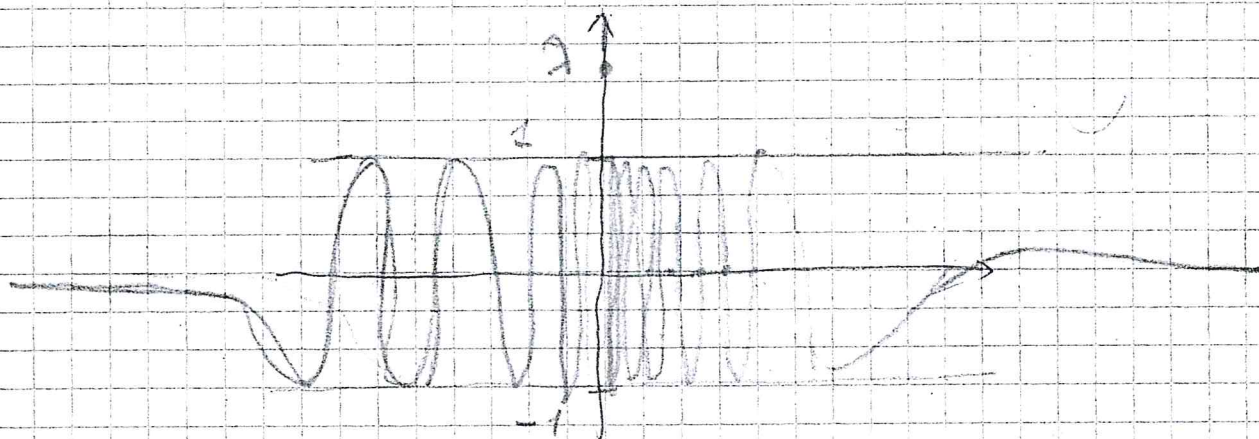
$$\text{hwa } f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

Cara ini bisa dilakukan:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ $\sin \mathbb{R}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ $\sin \mathbb{R} \setminus \{0\}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ $\sin (0, +\infty)$



a) ~~✓~~

b) ~~✓~~

c) ~~✓~~

dimoskalkan

ES 18.10.1.

10

Shudou, dato $\alpha \in (0, +\infty)$, l'andamento
qualche cosa vicino a zero $\downarrow$

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \text{ sen } \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Il seguente teo andava fatto alla fine della lezione 13
Teorema 18.10.1 (legame generale tra

seq. cpt e seq. diviso)

Sia $K \subseteq \mathbb{R}$. Allora sono equivalenti:

(i) K seq. compatto

(ii) K limitato e seq. diviso in $\mathbb{R}$.

Quindi, per decidere se un sottoinsieme K di
 $\mathbb{R}$ è compatto, basta controllare che sia
limitato e che ha seq. diviso (in $\mathbb{R}$).

Dm (i) $\Rightarrow$ (ii). Gra sappiamo che se K è
cpt allora è diviso (Prop. 13.10.1). Dobbiamo
vedere che K è limitato. Se per assurdo K
non è limitato, allora K non è limitato
inferiormente oppure superiormente. Supponiamo che
 K non ha limitatezza superiormente, l'altro caso
avendo sim.

Dunque $\forall \lambda > 0 \quad \exists x \in E \quad x > \lambda$

rendendo $\lambda = n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n \in E$

$x_n > n \implies$ ho costruito una
successione (x_n) di punti di E

convergente a $+\infty$. Dunque K non
può essere seq. completo, poiché se

lo fosse, (x_n) ammetterebbe una

sottosequenza convergente a un

punto di K ; ma allora a. n. d. ha

sottosec. dovrebbe convergere a $+\infty$,

dunque $+\infty \in K$, assurdo.

(iv) $\implies$ (i) Sia K chiuso e limitato.

Sia $(x_n) \in K$. Devo dim. che

$\exists (x_{n_k})$ convergente a un punto di K

Del fatto che K è limitato,

$\exists a, b \in \mathbb{R}, a < b: \quad K \subset [a, b]$

Dunque $(x_n) \subset K \subset [a, b]$. Del teo.

di B.W. $\exists (x_{n_k}), \quad x_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} p \in [a, b]$

$\exists a (x_{n_e}) \subset K, \text{ e } x_{n_e} \longrightarrow p,$
 $\text{e } K \text{ è chiuso} \implies p \in K.$

□

Molti questo teorema è la versione
dell'Analisi 1 di un teorema
che andrebbe enunciato in modo
diverso.

Proprietà del limite: 4 lemmi fondamentali.

Lemma 18.12.1 (primo lemma, RESTRIZIONE)

Sia $f: E \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
 $\bar{x} \in \overline{E}$. Sia $l := \lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x)$ su E
Sia $S \subseteq E$ $\cap \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$
 $\bar{x} \in \overline{S}$

Allora

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = l \quad \text{su } S \quad (18.12.1)$$

Esempio hptg: $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, E = \mathbb{R}, \bar{x} = 0$

$S = (0, +\infty)$; la (18.12.1) dice in questo caso
«limite hptg. D.L. 1.4»

Dni Dal Lemma 17.6.1(ii) segue che

basta dimostrare che $\forall (x_n) \subset S$

$x_n \rightarrow \bar{x}$ si ha $f(x_n) \rightarrow l$

Sia (x_n) una successione di punti di S ,

$x_n \rightarrow \bar{x}$. Ma $S \subseteq E$, dunque (x_n)

è una successione di punti di E , $x_n \rightarrow \bar{x}$.

Dal Lemma 17.6.1(ii) si ha $f(x_n) \rightarrow l$. □

Forse più interessante è la domanda

opposta, che nel caso dell'esempio tipico

alla fine di pg 12, chiederebbe: se di

una funzione f che limiti in $(0, +\infty)$

$\bar{c} =$ limiti in $(-\infty, 0)$, può dire

che esiste il limite «pieno», e i

tre limiti coincidono?

Lemma 18.13.1 (secondo Lemma UNIONE)

Siano $E, L \subseteq \mathbb{R}$, $f: E \cup L \rightarrow \mathbb{R}$

$\bar{x} \in \bar{E} \cap \bar{L}$, Supponiamo che

$$(18.16.1) \quad p := \lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) \quad \text{su } E, \quad p \in \mathbb{R}$$

$$\text{si abbia} \quad p = \lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) \quad \text{su } L \quad (18.16.2)$$

$$\text{Allora} \quad \exists \lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) \quad \text{in EUL}$$

$$\text{e vale} \quad p = \lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) \quad \text{in EUL}$$

Note

Questo enunciato non esclude l'esempio 18.6.1

$$\text{quando} \quad E = [1, 2), \quad L = (2, 3]$$

Note Lo stesso vale se $p = +\infty, -\infty$.

Dim Dal Lemma 17.6.1 (i) si ha, dalla (18.16.1),

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_1 > 0 : \forall x \in E, |x - \bar{x}| < \delta_1$$

$$\Rightarrow |f(x) - p| < \varepsilon$$

Inoltre, dalla (18.16.2),

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_2 > 0 : \forall x \in L, |x - \bar{x}| < \delta_2$$

$$\Rightarrow |f(x) - p| < \varepsilon.$$

Dunque, se definisco $\alpha_\varepsilon := \min(\delta_1, \delta_2) > 0$,
si ha:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha_\varepsilon : \forall x \in E \cup L, |x - \bar{x}| < \alpha_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - p| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = p \quad \text{in EUL}$$