

Cominciamo lo studio delle funzioni

$$f: E \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(E = \text{dom}(f))$$

(dove $E \neq \emptyset$). E si chiama dominio di f ,

Ricordiamo che $\overline{E} \subseteq \mathbb{R}$ indica la chiusura

(sequenziale) di E in $\mathbb{R}$. Ricordiamo, $x \in \mathbb{R}$,

$$\text{che } x \in \overline{E} \iff \exists (x_n) \subset E \quad x_n \rightarrow x$$

Notiamo che E è seq. chiuso (in $\mathbb{R}$)



$$\overline{E} = E$$

Gli E interessanti per noi:

$$E = \mathbb{R}$$

$E = \text{intervallo}$ (non ridotto a un punto),

Def 17.1.1 $E \subseteq \mathbb{R}$ si dice intervallo

se dati $x_1, x_2 \in E$, $x_1 < x_2$

$\Rightarrow$ tutti i punti compresi tra x_1 e x_2 appartengono ad E . Cioè $\forall \lambda \in [0, 1]$

$$\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2 \in E$$

Esempi di intervalli: se $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\mathbb{R} \quad (a, b) \quad (-\infty, \alpha)$$

$$[a, b) \quad (-\infty, \alpha]$$

$$(a, b] \quad (\beta, +\infty)$$

$$[\beta, +\infty)$$

(ne ho solo di otto tipi)

altre definizioni topologiche:

Def 17.2.1 Sia $E \subseteq \mathbb{R}$ ($E \neq \emptyset$), $x_0 \in E$

x_0 si dice ^{punto} isolato di E se

« vicino a lui non ci sono altri punti di $E \gg$ »

$$\exists p > 0 : B_p(x_0) \cap E = \{x_0\} \quad (17.2.1)$$

$B_p(x_0)$ = palla aperta di raggio p
e centro x_0 che in una dimensione
= $(x_0 - p, x_0 + p)$

E chiuso in $\mathbb{R}$ (per cosa) se e solo se 17.2.1 ha $E \subseteq \mathbb{R}$

$x_0 \in E$ x_0 non è isolato

$\Leftrightarrow$

$$x_0 \in \overline{E \setminus \{x_0\}}$$

(17.2.2)

6sa vuol dire

$$x_0 \in \overline{E \setminus \{x_0\}}$$

vuol dire che x_0 è limite di una
successione di punti di $E \setminus \{x_0\}$,
cioè che esiste una successione di
punti di E diversi da x_0 , convergenti
a x_0 .

$$x_0 \text{ è punto di } E \iff x_0 \in \overline{E \setminus \{x_0\}}$$

Spesso capiterà di avere $E = (a, b)$,
e $(a, b) \setminus \{x_0\}$.

Dimostriamo la $\implies$ della (17.2.2):

Se $x_0 \in E$ non è punto di E ,
allora

$$\forall p > 0 \quad \exists x \in B_p(x_0) \cap E, \quad x \neq x_0$$

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \exists x_k \in B_{\frac{1}{k}}(x_0) \cap E, \quad x_k \neq x_0;$$

$$\text{dist}(x_k, x_0) = |x_k - x_0| < \frac{1}{k}, \quad \text{e dunque}$$

$$x_k \longrightarrow x_0.$$

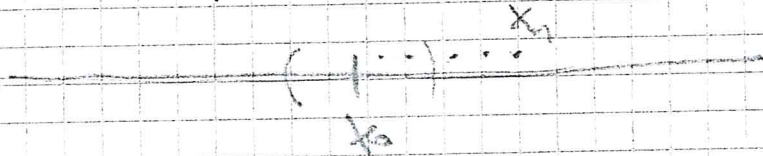


testa da devi. $\Leftarrow \exists x_0 \in \overline{E \setminus \{x_0\}}$ $\Leftarrow$

Allora $\exists (x_n) \subset E \setminus \{x_0\}$, $x_n \rightarrow x_0$

Imponiamo p.e. che x_0 sia isolato.

$$\exists \rho > 0: B_\rho(x_0) \cap E = \{x_0\}$$



D'altra parte, $\exists x_n \rightarrow x_0$, $x_n \neq x_0$,

$$\exists \bar{n}_\rho \in \mathbb{N}: \begin{cases} |x_n - x_0| < \rho \\ \forall n \in \mathbb{N}, n > \bar{n}_\rho \end{cases}$$

Concludiamo, infatti da una parte

$$x_n \in E, \quad x_n \neq x_0, \quad x_n \in B_\rho(x_0)$$

e dall'altra $B_\rho(x_0) \cap E = \{x_0\}$.

Introduciamo la nozione di limite di una funzione definita in E .

Vogliamo definire cosa sia

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) \quad \text{su } E$$

Sotto le ipotesi

$$f: E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

Dunque x non deve necessariamente
 essere un punto di E , ma almeno
 deve essere un punto di $\overline{E}$.

Esempio 17.5.1

Con particolarmente interessanti sono

proprio $\overline{x} \in \overline{E} \setminus E$

Ad esempio, la $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in (a, b)$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{su } (a, b) \setminus \{x_0\}$$

||

$$F(x), \quad \text{dom}(F) = (a, b) \setminus \{x_0\}$$

$$\text{e } x_0 \in \overline{(a, b) \setminus \{x_0\}}$$

oss 17.5.1 Non potremmo afferire nella definizione
 del limite, $f(\overline{x})$.

Fin qui, Ho Garman, tutta ancora
 avere dato la definizione, Prima della

definizione, dimostriamo un lemma, che
 permetterà di definire il limite, nel caso
 in cui esso ha senso.

Lemma 17.6.1 Sia $\bar{x} \in \bar{E}$, $p \in \mathbb{R}$
 $f: E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

Sono equivalenti:

(i) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall x \in E$

$$|x - \bar{x}| < \delta \quad \text{allora} \quad |f(x) - p| < \varepsilon$$

(ii) Per ogni successione (x_n) di punti
 di E , ^{convergente a $\bar{x}$} si ha $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} p$.

Una volta dimostrato il lemma:

Def 17.6.1 (Limite Reale) Sia

$f: E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\bar{x} \in \bar{E}$. Si dice

che $f(x)$ tende a p ^{su E} $\sqrt{|x - \bar{x}|}$ che tende a $\bar{x}$,
 e si scrive

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = p \quad \text{su } E,$$

che vale (i) oppure (ii) del Lemma 17.6.1.

oss 17.6.1 Perché il lemma 17.6.1 è interessante?

Perché riduce in molti casi ^(se non in tutti) il calcolo di p a un limite di successione, e tali limiti sono stati studiati nelle lezioni precedenti.

Es 17.7.1 Supponiamo la coppia (f, D)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \quad \text{su } E$$

Abbiamo $E = \text{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$f : E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

$$\bar{x} = 0$$

$$\underline{\bar{x} \in \bar{E} \setminus E}, \quad \bar{E} = \mathbb{R}$$

$$\text{Si ha } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{su } \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Perciò farlo in 2 modi.

$$(i) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, |x| < \delta_\varepsilon \\ \Rightarrow \left| \frac{\sin x}{x} - 1 \right| < \varepsilon. \quad \text{La prova.}$$

$$(ii) \quad \text{Sia } (x_n) \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}, x_n \rightarrow 0. \quad \text{Dato dev.} \\ \frac{\sin x_n}{x_n} \rightarrow 1$$

Alternative:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \text{ in } \mathbb{R}$$

$$E = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$f: E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

$$\bar{x} = 0 \in \overline{E} \setminus E$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$