

Lezione 16 24/10/19

9-11

Dim. (teo 15.16.1). Si tratta di una
serie a segni alterni (dunque non
una qualunque serie), e senza problemi
distinguerne gli indici pari e gli indici
dispari. Delta

$$S_i = \sum_{j=1}^i (-1)^j a_j$$

$$S_{2n+1} = -a_1 + a_2 - a_3 + \dots + a_{2n} - a_{2n+1}$$

$$= S_{2n-1} + \underbrace{a_{2n} - a_{2n+1}}_{\geq 0} \geq S_{2n-1}$$

$$\text{dato che } a_{2n+1} \leq a_{2n} \Rightarrow a_{2n} - a_{2n+1} \geq 0$$

$\Rightarrow n \rightarrow S_{2n+1}$ è crescente.

$$S_{2n+2} = -a_1 + a_2 - a_3 + \dots - a_{2n+1} + a_{2n+2}$$

$$= S_{2n} - \underbrace{a_{2n+1} + a_{2n+2}}_{\leq 0} \leq S_{2n}$$

$$\text{dato che } a_{2n+2} \leq a_{2n+1} \Rightarrow a_{2n+1} + a_{2n+2} \leq 0$$

$\Rightarrow n \rightarrow S_{2n+2}$ è decrescente

Tuolta (S_{2n+1}) è limitata dall'alto
 e (S_{2n+2}) è limitata dal basso

$$S_{2n+1} \leq -a_{2n+1} \leq 0 \quad (16.2.1)$$

$$(16.2.2) \quad S_{2n+2} \geq -a_1 + a_{2n+2} \geq -a_1 = \text{const}$$

Fino a qui ho usato $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
 $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Non ho ancora usato l'ipotesi $a_n \rightarrow 0$.

Dal teo 9.9.1 e da (16.2.1), (16.2.2)

$$\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n+1} = l_d \in \mathbb{R}$$

$$\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n+2} = l_p \in \mathbb{R}$$

$$S_{2n+2} - S_{2n+1} = a_{2n+2} \rightarrow 0$$

$$S_{2n+1} - S_{2n} = -a_{2n+1} \rightarrow 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (S_{2n+2} - S_{2n+1}) = l_p - l_d = 0 \Rightarrow l_p = l_d$$

ho finora dimostrato che la succ. delle
 somme parziali converge allo stesso
 limite (reale) della succ. delle somme
 parziali pari. Devo dimostrare che

la successione delle somme parziali
 converge (ovviamente a $l_p = l_s$)

Siamo in questa condizione: ho una
 successione reale (b_n) , di cui

$$\text{so che } b_{2n} \rightarrow l \in \mathbb{R}$$

$$b_{2n+1} \rightarrow l \in \mathbb{R}.$$

Affermo che $b_n \rightarrow l$.

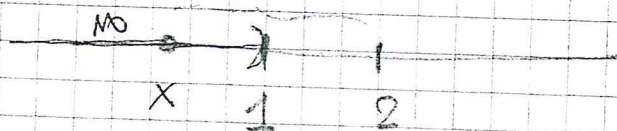
ES (ora): questo è vero per $(2n), (2n+1)$
 sono 2 sottosuccessioni di indice, tra loro
 disgiunti, tali che ricoprono tutto $\mathbb{N}$.

□

A questo punto, il caso $x = 1$ dell'esercizio
 di ieri è perfettamente giustificato. Resta
 il caso $x \neq 1$

Se $x < 1$

$$\sum \frac{(x-2)^n}{\sqrt{n}}$$



la successione $\frac{(x-2)^n}{\sqrt{n}} = \frac{(-1) \cdot (\text{numero} > 1)}{\sqrt{n}}$

$$= (-1)^n \frac{|x-2|^n}{\sqrt{n}}$$

(ho scelto $x-2 = -|x-2|$)

la sottosuccessione dei pari $\rightarrow +\infty$

la sottosuccessione dei dispari $\rightarrow -\infty$

in particolare non è un'alternanza. Dunque

$\sum \frac{(x-2)^n}{\sqrt{n}}$ non può convergere.

ES 16.4.1 (CASA) Siano $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n, \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$

due serie convergenti. Dimostrare

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$$

Def 16.4.1

Sia $x \in \mathbb{R}$; $x^+ =$ parte positiva di $x =$

$= \max(x, 0)$; $x^- =$ parte negativa di $x =$

$= -\min(x, 0)$ (vedi le cose buone... 1 100 51)

Es. 16.5.1 (corsa)

Ha $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| < +\infty$. Allora

$$\sum_{n \geq 1} a_n^+ < +\infty, \quad \sum_{n \geq 1} a_n^- < +\infty, \quad \text{e si ha}$$

$$\sum_{n \geq 1} a_n = \sum_{n \geq 1} a_n^+ - \sum_{n \geq 1} a_n^-$$

Es. 16.5.2 (corsa)

$$\sum_{n \geq 1} |a_n| < +\infty \iff \begin{aligned} &\sum_{n \geq 1} a_n^+ < +\infty \\ &\sum_{n \geq 1} a_n^- < +\infty \end{aligned}$$

$$\text{E si ha} \quad \sum_{n \geq 1} |a_n| = \sum_{n \geq 1} a_n^+ + \sum_{n \geq 1} a_n^-$$

Es. 16.5.3 (corsa) Supponiamo

$$\sum_{n \geq 1} |a_n| = +\infty, \quad \sum_{n \geq 1} a_n \in \mathbb{R}$$

Allora $\sum_{n \geq 1} a_n^+ = +\infty, \quad \sum_{n \geq 1} a_n^- = +\infty$

Def. 16.5.1 Ha $\sum_{n \geq 1} a_n$ serie di numeri

reali. La serie $\sum_{n \geq 1} b_n$ si dice riordinamento

di $\sum_{n \geq 1} a_n$ se $\exists$ funzione $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ bigettiva
tale che $b_n = a_{f(n)} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Esempio

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

16

Non converge assolutamente ($\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} = +\infty$)

Converge (dal criterio di Leibnitz)

Quindi in definizione la serie converge condizionatamente

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = S \in \mathbb{R}$$

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

$$\frac{1}{2} S = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots$$

Sì

(In generale $\lambda \sum_{n \geq 1} a_n = \sum_{n \geq 1} \lambda a_n$ $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\text{e } \sum_{n \geq 1} a_n \in \mathbb{R})$$

$$\frac{3}{2} S = S + \frac{1}{2} S = \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots \right)$$

= se posso, sommo in un ordine a mio piacimento

$$= 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \dots = S$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} S = S \quad !!$$

Questo esempio suggerisce sostanzialmente
che i riordinamenti non sono leciti
per le serie condizionatamente convergenti.
Cosa succede allora in le serie assolt.
convergenti?

Teo 16.7.1 (di DIRICHLET) $\sum_{n \geq 1} a_n$ assolutamente

convergente. Sia $\sum_{n \geq 1} b_n$ un riordina-

mento di $\sum_{n \geq 1} a_n$. Allora anche

$\sum_{n \geq 1} b_n$ è assolutamente convergente e

$$(16.7.1) \quad \sum_{n \geq 1} b_n = \sum_{n \geq 1} a_n.$$

Oss 16.7.1 I riordinamenti non sono
possibili in le serie condizionatamente

convergenti. Anzi, data $\sum_{n \geq 1} a_n$ condiz. conv.,
e dato $\lambda \in [-\infty, +\infty]$, esiste un riordinamento

$\sum_{n \geq 1} b_n$ di $\sum_{n \geq 1} a_n$, tale che $\sum_{n \geq 1} b_n = \lambda$

[E. GIUSTI, Analisi 1, Boringhieri] (teo di WEIERSTRASS)

Dui (tes Dnidel) Facciamo la dui. 8
in 2 con.

Caso 1 supponiamo $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Dato $n \in \mathbb{N}$, $B_n := \sum_{k=1}^n b_k$

Dati che sono in presenza di un riordinamento,

i b_k , per $k=1, \dots, n$, sono alcuni degli a_j

(ma non tutti in generale), dunque $B_n \leq \sum_{j=1}^{+\infty} a_j \in \mathbb{R}^+$

Confronto semi a_k e b_k : ≥ 0

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \leq \sum_{j=1}^{+\infty} a_j \quad \uparrow \text{ (per } j \text{)} \quad \text{iper}$$

Scambiando il ruolo di a_n e b_n , si ottiene

anche $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \leq \sum_{j=1}^{+\infty} b_j$. Dunque

$$\sum_{j=1}^{+\infty} a_j = \sum_{j=1}^{+\infty} b_j.$$

Caso 2. a_n di segno qualunque.

Considero $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$. Per ipotesi, $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| < +\infty$.

Nota che $\sum_{n=1}^{+\infty} |b_n|$ è un riordinamento di $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$

Applicando il caso 1 ho $\sum_{n=1}^{+\infty} |b_n| = \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$

In particolare $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ è assolutamente convergente.

9

Reche da div. de (16.7.1). Notad

$$\sum_{n \geq 1} b_n^+ \quad e^- \text{ un word. de } \sum_{n \geq 1} a_n^+$$

$$\sum_{n \geq 1} b_n^- \quad e^- \text{ un word. de } \sum_{n \geq 1} a_n^-$$

$$\sum_{n \geq 1} b_n \stackrel{\uparrow}{=} \sum_{n \geq 1} b_n^+ - \sum_{n \geq 1} b_n^-$$

$$\text{es. 16.5.1 (dato de } \sum_{n \geq 1} |b_n| < +\infty)$$

$$\stackrel{\uparrow}{=} \sum_{n \geq 1} a_n^+ - \sum_{n \geq 1} a_n^-$$

$$\text{CAP 1, dato de } a_n^+ \geq 0, a_n^- \geq 0$$

$$\stackrel{\uparrow}{=} \sum_{n \geq 1} a_n$$

$$\text{es. 16.5.1}$$

□