

Lezione 15 23/10/19

9-13

Dim. di ii) $\Rightarrow$ i) def. 16.10.1.

Sia (a_n) di Cauchy in $\mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$)

Dimostriamo che (a_n) è limitata. (PASSO 1)

In fatti consideriamo la def. 14.9.1

Con $\varepsilon = 1$: $\exists \bar{n}_1 \in \mathbb{N} : \forall h, m \in \mathbb{N}$

$$n > \bar{n}_1, \quad m > \bar{n}_1 \quad \text{si ha}$$

$$|a_n - a_m| < 1$$

In particolare per $m = \bar{n}_1 + 1$

$$\text{ho } |a_n - a_{\bar{n}_1 + 1}| < 1$$

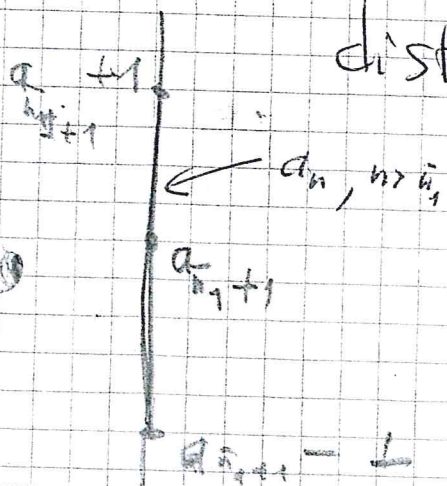
Cioè

$$\exists \bar{n}_1 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} \quad n > \bar{n}_1$$

$$\text{dist}(a_n, a_{\bar{n}_1 + 1}) < 1$$

$$\Rightarrow (a_n) \text{ è def. n}$$

limitata $\Rightarrow (a_n)$ è
limitata.



PASSO 2:

Segue da B.W. $\exists l \in \mathbb{R}$,

$\exists (n_k)$ subseqüência tal de

$$a_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} l$$

Resumindo:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n}_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n, m \in \mathbb{N}, n > \bar{n}_\varepsilon, m > \bar{n}_\varepsilon$$

$$|a_n - a_m| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{k}_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall k \in \mathbb{N}, k > \bar{k}_\varepsilon$$

$$|a_{n_k} - l| < \varepsilon$$

Sobretudo
para $a = l$

Deo disso tem-se que $a_n \rightarrow l$ com

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \hat{n}_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n > \hat{n}_\varepsilon$$

$$|a_n - l| < \varepsilon$$

Somando

$$|a_n - l| = |a_n - a_{n_k} + a_{n_k} - l|$$

$$\leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - l|$$

Fixo $\varepsilon > 0$; sendo $\bar{n}_\varepsilon$ como acima;

$\forall n \in \mathbb{N}, n > \bar{n}_\varepsilon$, e $k \in \mathbb{N}$ é tal de $n_k > \bar{n}_\varepsilon$

$$|a_{n_k} - l| < \varepsilon$$

In definitiva, $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n}_\varepsilon \in \mathbb{N} :$

$$\forall n > \bar{n}_\varepsilon \quad |a_n - l| < 2\varepsilon.$$

$$\text{Cioè } a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l \quad \square$$

Nota Posso prendere $\hat{n}_\varepsilon = \bar{n}_\varepsilon$.

Nota Altra dim. di ii) $\Rightarrow$ i).

Per ipotesi $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n}_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n, m \in \mathbb{N} : n > \bar{n}_\varepsilon, m > \bar{n}_\varepsilon$

$$a_m - \varepsilon < a_n < a_m + \varepsilon$$



pensando in fisso

$$\sup_{n > \bar{n}_\varepsilon} a_n \leq a_m + \varepsilon$$

ovvio

$$a_m - \varepsilon \leq \inf_{n > \bar{n}_\varepsilon} a_n$$

Deduco

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n}_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall m \in \mathbb{N}, m > \bar{n}_\varepsilon$$

$$a_m - \varepsilon \leq \inf_{n > \bar{n}_\varepsilon} a_n \leq \sup_{n > \bar{n}_\varepsilon} a_n \leq a_m + \varepsilon$$

PARTE 2

$$a_m - \varepsilon \leq \inf_{k > \bar{n}_\varepsilon} a_k \leq \sup_{k > \bar{n}_\varepsilon} a_k \leq a_m + \varepsilon$$

$$\varepsilon = \frac{1}{h} \quad h \in \mathbb{N}$$

$$\forall h \in \mathbb{N} \quad \exists \bar{n}_{\frac{1}{h}} \in \mathbb{N} \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad m > \bar{n}_{\frac{1}{h}}$$

$$a_m - \frac{1}{h} \leq \inf_{k > \bar{n}_{\frac{1}{h}}} a_k \leq \sup_{k > \bar{n}_{\frac{1}{h}}} a_k \leq a_m + \frac{1}{h}$$

↓

$$a_m - \frac{1}{h} \leq \sup_h \inf_{k > \bar{n}_{\frac{1}{h}}} a_k \leq \inf_h \sup_{k > \bar{n}_{\frac{1}{h}}} a_k \leq a_m + \frac{1}{h}$$

⇓

$$0 \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n - \liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n \leq 2h^{-1}$$

↓ $h \rightarrow +\infty$

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = \liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n$$

↓

$$\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \quad (\in \mathbb{R}, \text{ per } (a_n) \text{ è convergente})$$

□

51

Serie a termini qualunque: esempio tipic

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

$\uparrow \downarrow \uparrow \downarrow \dots$

Ci sono vari problemi: se (a_n) è
una succ. reale, cosa significa il
simbolo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

Ricordo che questo simbolo era stato
definito quando tutti gli $a_n \geq 0$ come segue:

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

$$\sup \{ S_n : n \in \mathbb{N} \} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \quad (15.5.1)$$

Dato che (S_n) è crescente, dal teo
fond. succ. monotone (teo. 9.9.1)

segue che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n \quad (15.5.2)$$

ES

6

Pensiamo a una pallina che si muove con velocità di modulo 1, verso il basso in 1 secondo, poi verso l'alto in $\frac{1}{2}$ secondo, poi verso il basso in $\frac{1}{3}$ di secondo e via di seguito. Domanda:

1) Spazio totale percorso dalla pallina?

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

bloccetti 2^n + confronto

(vedi anche test di condensation)

2) $\exists$ posizione "finale" della pallina al finito?

vedremo che s $\dot{y}$, cioè che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \text{ converge}$$

Nota: Questa è una serie a termini alterni.

Def (15.6.1). Se gli a_n non sono tutti ≥ 0

la def (15.5.1) non è rappresentativa.

Però la (15.5.2) risulta rappresentativa.

Def 15.7.1 Sia (a_n) una succ. reale

Si dice che la serie degli a_n converge, se

$$\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n \in \mathbb{R}$$

dove $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$, e tale limite

si indica con $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$,

Si dice che la serie diverge positivamente

$$\text{se } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty,$$

si dice che diverge negativamente se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = -\infty,$$

si dice che è indeterminato se

$$\nexists \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n.$$

Infine si dice che la serie converge assolutamente

se $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| < +\infty$, e si dice che converge

condizionatamente se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge ma $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| = +\infty$.

Esempio 15.8.1 (due serie che NON sono a termini ≥ 0)

• $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n$ è indeterminato.

In fatti $S_n = \begin{cases} -1 & \text{se } n \text{ dispari} \\ 0 & \text{se } n \text{ pari.} \end{cases}$

• $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ non converge assolutamente

dato che $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$

Il fatto che converga condizionalmente
va invece dimostrato

Teo 15.8.1. Sia (a_n) una succ. reale.

Allora

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \in \mathbb{R}$ (cioè la serie converge)

$\Downarrow$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$

$n \rightarrow +\infty$

(Confrontare con teo 7.8.1)

Exemple 15.9.1.

9

$$\sum \underbrace{(-1)^n \frac{n}{n+1}}_{a_n}$$

$\nexists \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$, donc $\sum a_n$ non

converge.

Prop Si $h_a \quad a_n = s_n - s_{n-1} \quad \forall n \geq 2$

On prouve $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge, nécessairement

$$S := \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \in \mathbb{R}, \quad h_a$$

$$s_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} S$$

$$s_{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} S$$

$$\Rightarrow s_n - s_{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

(précisément $S \in \mathbb{R}$)

$$\Rightarrow a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \square$$

Teo 15.10.1

Sia (a_n) successione reale.

Allora

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| < +\infty \implies \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \in \mathbb{R}$$

cioè a parole, se la serie converge assolutamente, allora converge.

Questo permette di ridurre alcuni

enunciati sulle serie a termini qualunque allo studio delle serie a termini positivi.

Dim Sia $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$. Dato

dimostrare che (S_n) è convergente a un numero reale. Dal teo. 16.10.1

(S_n) è convergente a un numero reale



(S_n) è di Cauchy.

Vi basta dunque dimostrare che (S_n)

è di Cauchy. Fissati due indici $n, k \in \mathbb{N}$

$$|S_{n+k} - S_n| = \left| \sum_{j=n+1}^{n+k} a_j \right| \leq$$

$$\sum_{j=n+1}^{n+k} |a_j| \leq \sum_{j=n+1}^{+\infty} |a_j|$$

Dato che $\sum_{j=1}^{+\infty} |a_j| < +\infty$, non è

difficile (PER CASA) dimostrare che:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n}_\varepsilon \in \mathbb{N}:$$

$$\sum_{j=\bar{n}_\varepsilon+1}^{+\infty} |a_j| < \varepsilon$$

Di conseguenza, $\forall \varepsilon > 0$, prendo tale $\bar{n}_\varepsilon \in \mathbb{N}$ e

ho che $\forall n, k \in \mathbb{N}$, $n > \bar{n}_\varepsilon$ si ha

$$|s_{n+k} - s_n| < \varepsilon$$

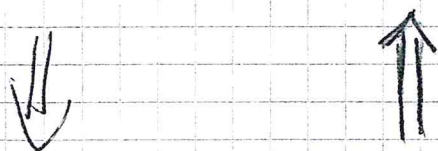
Di conseguenza (s_n) è di Cauchy

□

« La dimostrazione Non è facile perché
 pensa altrimenti il teo 16.10.1, e
 il fatto che le code di $\sum |a_n|$ a.c.v.
 sono piccole quanto si vuole $\Rightarrow$

oss. 15.12.1 (che non serve per fare gli
esercizi di Analisi 1, ma è di carattere
strutturale).

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| < +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \in \mathbb{R}$$



Le successioni di Cauchy in $\mathbb{R}$ sono
convergenti a un numero reale.

Dunque il teorema di Completezza
di $\mathbb{R}$ equivale a dire che le serie
assolutamente convergenti sono convergenti.

Idea della dimostrazione di $\Downarrow$

Sia (a_n) di Cauchy in $\mathbb{R}$. Dovo
dimostrare che (a_n) converge a un
numero reale.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n}_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n, m \in \mathbb{N}, \quad n > \bar{n}_\varepsilon, m > \bar{n}_\varepsilon \\ |a_n - a_m| < \varepsilon$$

Prendero $\varepsilon = \frac{1}{2^k}$ (perché mi serve $\sum \frac{1}{2^k} < +\infty$)

$$\varepsilon = \frac{1}{2}$$

13

$$\exists \bar{n}_1 \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq \bar{n}_1 \quad |q_n - q_m| < \frac{1}{2}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2^2}$$

$$\exists \bar{n}_2 \in \mathbb{N}, \bar{n}_2 > \bar{n}_1 : \forall n, m \geq \bar{n}_2 \quad |q_n - q_m| < \frac{1}{2^2}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2^3}$$

$$\exists \bar{n}_3 \in \mathbb{N}, \bar{n}_3 > \bar{n}_2 : \forall n, m \geq \bar{n}_3 \quad |q_n - q_m| < \frac{1}{2^3}$$

$$\forall k$$

$$\exists \bar{n}_k \in \mathbb{N}, \bar{n}_k > \bar{n}_{k-1} : \forall m, n \geq \bar{n}_k$$

$$|q_n - q_m| < \frac{1}{2^k}$$

↓

$$|a_{\bar{n}_{k+1}} - a_{\bar{n}_k}| < \frac{1}{2^k}$$

Ne segue

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |a_{\bar{n}_{k+1}} - a_{\bar{n}_k}| < \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} < +\infty$$

Dunque $\sum_{k=1}^{+\infty} (a_{\bar{n}_{k+1}} - a_{\bar{n}_k})$ converge assolutamente

Dall'ipotesi segue allora

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (a_{\bar{n}_{k+1}} - a_{\bar{n}_k}) \in \mathbb{R}$$

Per ora ho dimostrato: se (q_n) di Cauchy,

allora $\exists (\bar{n}_k) : \sum_{k=1}^{+\infty} (a_{\bar{n}_{k+1}} - a_{\bar{n}_k}) \in \mathbb{R}$

$\exists$ finito

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^l (a_{\bar{n}_{k+1}} - a_{\bar{n}_k}) = \lim_{l \rightarrow +\infty} (a_{\bar{n}_l} - a_{\bar{n}_1})$$

$$= \lim_{l \rightarrow +\infty} a_{\frac{n}{l+1}} - a_{\frac{n}{l}}$$

Donque (a_n) ammette una sotto succ.
convergente a un numero reale.

Abbiamo (a_n) di Cauchy con una
sotto succ. convergente a un numero reale.

Quanto fatto a pag 2 si ripete (senza
modifiche) per dimostrare che (a_n) converge. $\square$

Esercizio 15.16.1

Discutere al variare

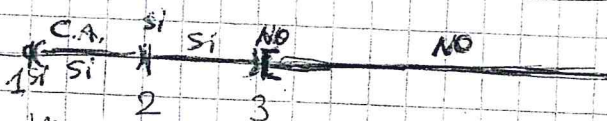
di $x \in \mathbb{R}$ la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-2)^n}{\sqrt{n}}$$

Se $x = 2$ la serie converge.

Se $x > 2$ la serie è a termini positivi.

serie a termini alterni | serie a termini ≥ 0



Se $x = 3$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$$

$x = \frac{1}{2}$

ma (vedi lezione 8 pag 4) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} < +\infty \Leftrightarrow \alpha > 1$

15 17
14
Dunque $\forall x=3$ la serie diverge.

la converte (la serie a termini positivi)

segue da la serie diverge $\forall x > 3$

Se $x \in (2, 3)$

$$\left| \frac{(x-2)^n}{\sqrt{n}} \right| = \frac{(x-2)}{\sqrt{n^{1/2}}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x-2$$

1

Ma $x-2 \in (0, 1)$. Dal teo 7.6.1

segue che la serie converge.

Resta il caso $x < 2$, dove (purtroppo) la serie non è più a termini positivi.

Consideriamo $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|x-2|^n}{\sqrt{n}}$

Se $x \in (1, 2)$ $|x-2| < 1$. Con lo stesso ragionamento appena fatto ho $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|x-2|^n}{\sqrt{n}} < +\infty$.

Dunque $x \in (1, 2) \Rightarrow$ conv. assoluta $\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-2)^n}{\sqrt{n}} \in \mathbb{R}$

Resta il caso

$$x \leq 1$$

Per risolvere questo caso, serve il

teo 15.16.1 (CRITERIO DI LEIBNITZ sulle

serie a segni alterni)

Sia $a_n \geq 0$

$\forall n \in \mathbb{N}$.

Se valgono

[1] (a_n) è decrescente

[2] $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Def. 15.16.1. Sia $a_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}$
La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$ si dice serie
a termini alterni.

Allora $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n \in \mathbb{R}$

Prima di fare la dimostrazione, vediamo
anche l'esempio di prima

$$x = 1$$

Si ha $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

che è una serie a segni alterni; posto $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} > 0$
si ha che (a_n) è decrescente e infinitesimale.

Del criterio di Leibnitz segue che $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \in \mathbb{R}$

17

• In $x=1$ ho Cointegrita, ma non Cointegrita
asintotica; dunque ho Cointegrita Condizionata.

Resta $x < 1$.