

Lezione 14 22/10/19 9-11

Ulteriori osservazioni nel lec di B.W.

Oss 14.1.1 Sia (a_n) una succ. reale.

Allora (a_n) ammette sempre una sottosucc. convergente a un punto in $[-\infty, +\infty]$.

Inoltre, se $\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$,

allora (a_n) ha una sottosucc. convergente a $+\infty$ (per cosa, una A fa il modo simile a quanto fanno tra (a_n));
 (vedi Oss. 14.2.1)

se $\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$

allora (a_n) ha una sottosucc. convergente a $-\infty$.

Resta il caso $\left\{ \begin{array}{l} \limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n < +\infty \\ \text{e} \\ \liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n > -\infty \end{array} \right.$; in tal caso

allora (a_n) è limitata (per cosa), e dunque scatta il teorema 13.1.1.

OSS 14.2.1. Supponiamo (a_n) limitata.

Ridimostriamo che (a_n) ammette una sottosucc. convergente a un numero reale.

Se (a_n) è limitato,

$$l^- := \liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n \in \mathbb{R}$$

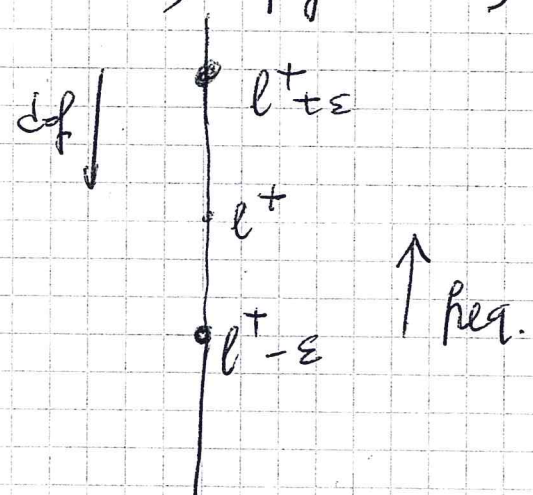
$$l^+ := \limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n \in \mathbb{R}$$

Costruiamo una sottosucc. di (a_n) convergente a l^+ (un argomento simile si fa per l^-).

$$\forall \varepsilon > 0 \quad a_n < l^+ + \varepsilon \quad \text{def. } n \quad (14.2.1)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad a_n > l^+ - \varepsilon \quad \text{freq. } n \quad (14.2.2)$$

(vedi lezione, pag 14)



la (14.2.1) è

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n}_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} \quad n > \bar{n}_\varepsilon \quad a_n < l^+ + \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists m \in \mathbb{N} \quad m > n \quad a_m > l^+ - \varepsilon$$

la (14.2.2) è

Wideband Active Region Metasurface Antennas

Publication:	IEEE Transactions on Antennas and Propagation	Publisher:	IEEE
Publication ID:	0033400	Author:	Stefano Maci
Manuscript DOI:	10.1109/TAP.2019.2940365	ORCID® ID:	0000-0003-3145-0074
Manuscript ID:	AP1904-0754		
Publication Date:			
CC License(s):	IEEE		

ORDER CONFIRMATION

Order number: 10000082195
Order date: 09-Oct-2019

Page charge:	Original Fee	Discounts
Overlength Page Charge: JPC	800.00 USD	None
	800.00 USD	
TOTAL:	800.00 USD	(0.00 USD)

Tax/VAT may be based on the customer location and is the customer's responsibility.

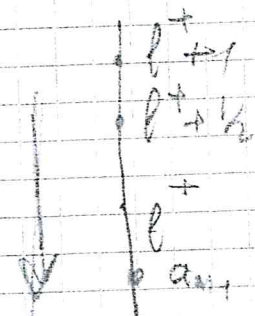
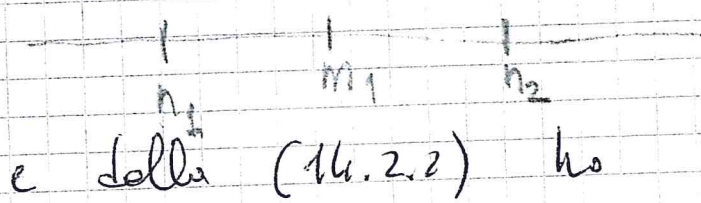
Billing address: Stefano Maci
University of Siena
Via Roma 56
Dept. of Information Engineering VAT: 00273530527
Siena, Siena 53100
Italy

Customer location: Stefano Maci
Via Roma 56
Dept. of Information Engineering
Siena, Siena 53100
Italy

VAT ID: IT00273530527

ult
 $\varepsilon = 1$; ho : lemma (14.2.1)

$$\exists n_1 \in \mathbb{N} \quad a_n < l^+ + 1 \quad \forall n > n_1$$



$$\exists m_1 > n_1 : \quad a_{m_1} > l^+ - 1$$

e inoltre $a_{m_1} < l^+ + 1$

$$|a_{m_1} - l^+| < 1$$

Prevedo $\varepsilon = 1/2$; ho lemma (14.2.1)

$$\exists n_2 \in \mathbb{N} : \quad a_n < l^+ + 1/2 \quad \forall n > n_2$$

E scelto anche $n_2 > m_1$ (per farlo)

Inoltre lemma (14.2.2) ho

$$\exists m_2 > n_2 : \quad a_{m_2} > l^+ - 1/2$$

e inoltre $|a_{m_2} - l^+| < 1/2$

Ripetendo il ragionamento con $\varepsilon = \frac{1}{k}$
 con $k \in \mathbb{N}$, mi costruisco (per induzione su k)

una successione (m_k) di numeri
naturali crescente, tale che

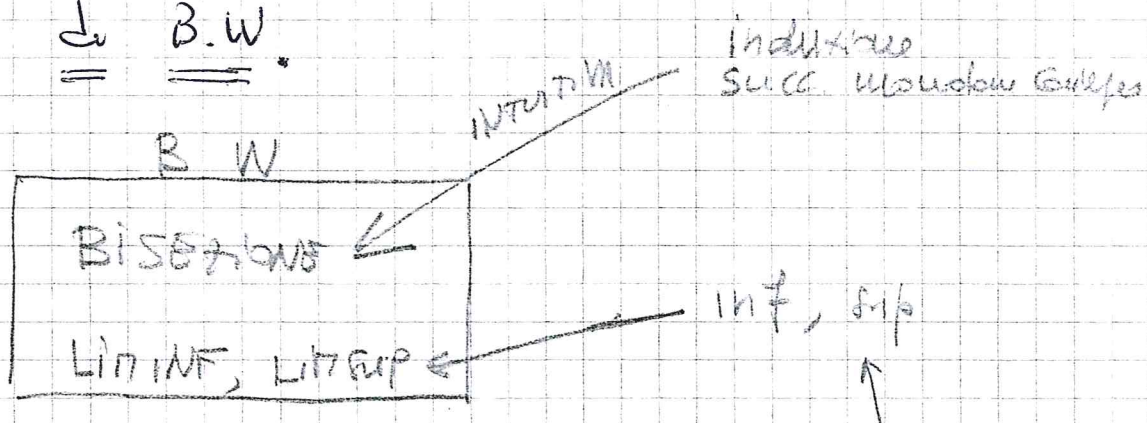
$$|a_{m_k} - l^+| < \frac{1}{k} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Ne segue $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_{m_k} = l^+$.

(Quindi (a_{m_k}) è la sottosucc. cercata). $\square$

In definitiva, abbiamo 2 dimensioni $\neq$

del te di B.W.



Inductive
Succ. Window Gaps

inf, sup
↑
elementi relativi

Ulteriori osservazioni sul fatto che $\mathbb{R}$ non
è numerabile (vedi Teo L. G. 1): un'altra
dimostrazione (CANTOR).

Teo 14.4.1 Supponiamo (ω_k) sia una

successione di numeri reali. Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,
 $\alpha < \beta$. Allora $\exists \eta \in [\alpha, \beta]$, $\eta \neq \omega_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

Schema di dim.
Dim $\forall$ Sia $k_1 \in \mathbb{N}$ il minimo numero
 naturale tale che $\omega_{k_1} \in (\alpha, \beta)$

Se k_1 non esiste, allora

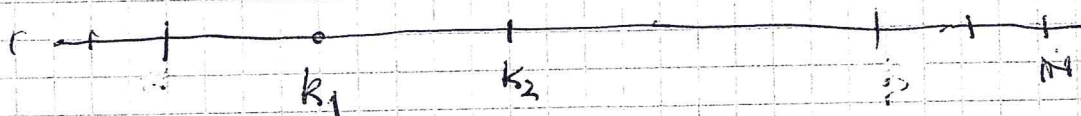
$$\omega_k \notin (\alpha, \beta) \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

e dunque $\forall \eta \in (\alpha, \beta)$ η verifica la tesi.

Possiamo ridurci al caso in cui k_1 esiste

(il minimo $\exists$ per cui N è bene ordinato).

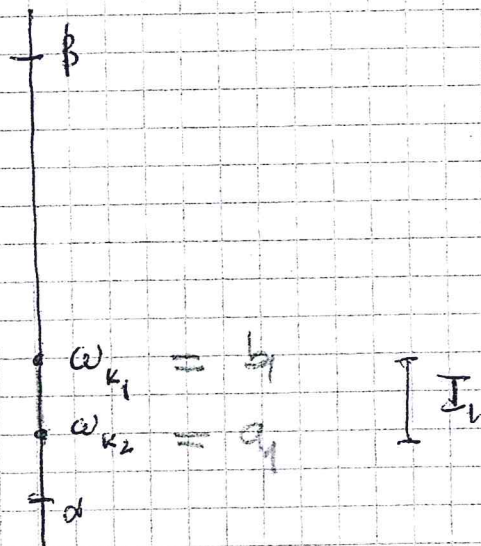
Analogamente prendo $k_2 > k_1$ il minimo
 intero tale che $\omega_{k_2} \in (\alpha, \beta)$. Possi dire $\omega_{k_2} \neq \omega_{k_1}$



$$a_1 = \min\{\omega_{k_1}, \omega_{k_2}\}$$

$$b_1 = \max\{\omega_{k_1}, \omega_{k_2}\}$$

$$I_1 = [a_1, b_1]$$



Ripeto il ragionamento con (a_1, b_1) al posto

di (α, β) ; costruisco $k_2 < k_3 < k_4$, $I_2 = [a_2, b_2]$

ho costruito una successione (I_k) di
intervalli

$$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots$$

Allora l'idea è: $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} I_k$ è un intervallo
non vuoto (potrebbe essere un singolo);

e $\gamma \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} I_k$ verifica la tesi.

□

Esercizio 16.6.1. (Teo di CESÀRO)

Sia (a_n) un succ. reale,

$$a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l \in [-\infty, +\infty].$$

Allora $\forall$ $\Pi_n = \frac{1}{n} (a_1 + \dots + a_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$,
detti

si ha

$$\Pi_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l.$$

In generale il viceversa è falso.

Per il viceversa, considero $a_n = (-1)^n$. In
questo caso

$$\Pi_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è pari} \\ -\frac{1}{n} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

Se n è pari

Se n è dispari

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \Pi_n = 0$. Ma (a_n) non converge.

Del punto di vista del ^{minimo, massimo e} $\sqrt{\text{media aritmetica}}$,
le successioni non sono equivalenti $\Rightarrow$

Suggerimento per l'esercizio: vale per
in generale la catena seguente di disuguaglianze

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} M_n \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \Pi_n \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n \quad (14.7.2)$$

$\nwarrow$ non evidente $\swarrow$ non evidente
 $\uparrow$ Sempre vero

Se (14.7.1) è dimostrata, allora l'esercizio
segue immediatamente. Infatti, se

$\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$, si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n$$

e dunque dalla (14.7.1) deduce

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \Pi_n = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \Pi_n$$

Questo vuol dire che $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \Pi_n$

$$\left(= \liminf_n \Pi_n = \limsup_n \Pi_n = \lim_n a_n \right)$$

Dunque il tratto di $\limsup$ è non evidente 8.10
 nella (14.8.1). Ad esempio

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \Pi_n \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n. \quad (14.8.1)$$

Poniamo $l^+ := \limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n$.

Facciamo la d.m. nel caso l^+

gli altri casi si fanno in modo simile.

Se $l^+ \in \mathbb{R}$, $\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n}_\varepsilon \in \mathbb{N}$:

$$a_n < l^+ + \varepsilon \quad \text{d.f.}$$

$$a_n > l^+ - \varepsilon \quad \text{freq.}$$

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad m > \bar{n}_\varepsilon \quad \text{si ha} \quad a_m < l^+ + \varepsilon$$

$$\Pi_m = \frac{1}{m} (a_1 + \dots + a_m)$$

$$= \frac{1}{m} (a_1 + \dots + a_{\bar{n}_\varepsilon} + a_{\bar{n}_\varepsilon+1} + \dots + a_m)$$

$$= \frac{1}{m} (a_1 + \dots + a_{\bar{n}_\varepsilon}) + \frac{1}{m} (a_{\bar{n}_\varepsilon+1} + \dots + a_m)$$

$$\leq \frac{1}{m} (a_1 + \dots + a_{\bar{n}_\varepsilon}) + \frac{1}{m} (m - (\bar{n}_\varepsilon + 1)) (l^+ + \varepsilon)$$

$$\Rightarrow \limsup_{m \rightarrow +\infty} \Pi_m \leq 0 + (l^+ + \varepsilon).$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \limsup_{m \rightarrow +\infty} \Pi_m \leq l^+ + \varepsilon$$

Possiamo $\varepsilon = \frac{1}{k}$ e facendo
 $\lim_{k \rightarrow +\infty}$, si ha (14.8.1).

Def 14.9.1 Sia (a_n) una seq. di
numeri reali o complessi. Si dice
che (a_n) è di Cauchy se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n}_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall m, n \in \mathbb{N}$$

$$m > \bar{n}_\varepsilon, \quad n > \bar{n}_\varepsilon,$$

$$\text{si ha} \quad |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

In tale definizione NON appare
un eventuale limite. Così è una
def che coinvolge solo gli a_n , non
c'è l^+ , l^- , l "estremo" $\gg$

« la def. 14.9.1 equivale a

$$\lim_{(n, m) \rightarrow (+\infty, +\infty)} |a_n - a_m| = 0 \quad \gg$$

16.10.1
TEO V (di COMPLETEZZA DI $\mathbb{R}$)

Sia (a_n) una m.c. di numeri reali
(o complessi). "Mi posso agganciare a l con la dir. di Cauchy"

i) ^{facile} Se (a_n) è convergente a un
numero reale (o complesso)

allora (a_n) è di Cauchy

ii) ^{difficile} Se (a_n) è di Cauchy, "non ho niente a cui agganciarci"

allora converge a un numero
reale (o complesso).

Dim i) Se $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$)

allora $\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n}_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}$
 $n > \bar{n}_\varepsilon \Rightarrow |a_n - l| < \varepsilon$

Fisso $\varepsilon > 0$; trovo $\bar{n}_\varepsilon$; prendo $m, n \in \mathbb{N}$

$m > \bar{n}_\varepsilon, n > \bar{n}_\varepsilon$;

$$|a_n - a_m| = |a_n - l + l - a_m| \leq |a_n - l| + |l - a_m| < 2\varepsilon$$

Dimostrar

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n}_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n, m \in \mathbb{N}$$

$$n > \bar{n}_\varepsilon, \quad m > \bar{n}_\varepsilon \quad |a_n - a_m| < 2\varepsilon.$$

Questo equivale a dire che (a_n) è
di Cauchy.

ii)

PASSO 1

(a_n) è limitata; PASSO 2

BW $\Rightarrow a_{n_k} \rightarrow L$ e un'ipotesi

limit, limit