

Lezione 13 18/10/2019 14-17

1

Teo 13.1.1 (Completta di BW)

Sia (a_n) una succ. reale tale che

$$\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} \quad \alpha \leq a_n \leq \beta$$

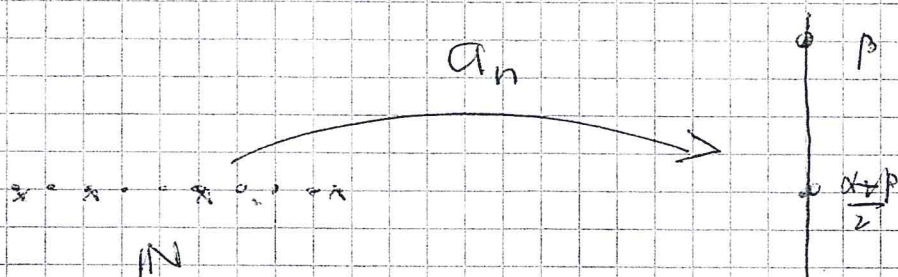
Allora (a_n) ammette una sottosuccessione

convergente a un numero reale $\in [\alpha, \beta]$

Dim Dividiamo $[\alpha, \beta]$ in 2 parti uguali

Consideriamo $[\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}]$, $[\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta]$

Dico che $\exists$ infiniti $n \in \mathbb{N} : a_n$ approssima
a (almeno) una delle due metà



Infatti, se p.a. finiti sono gli $n \in \mathbb{N}$

in cui $a_n \in [\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}]$ e finiti sono gli $n \in \mathbb{N}$

in cui $a_n \in [\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta]$ allora l'insieme dei punti di accumulazione è vuoto.

Prendiamo una delle due m.e. per cui
la ipotesi è vera. Sia I_1 tale m.e.

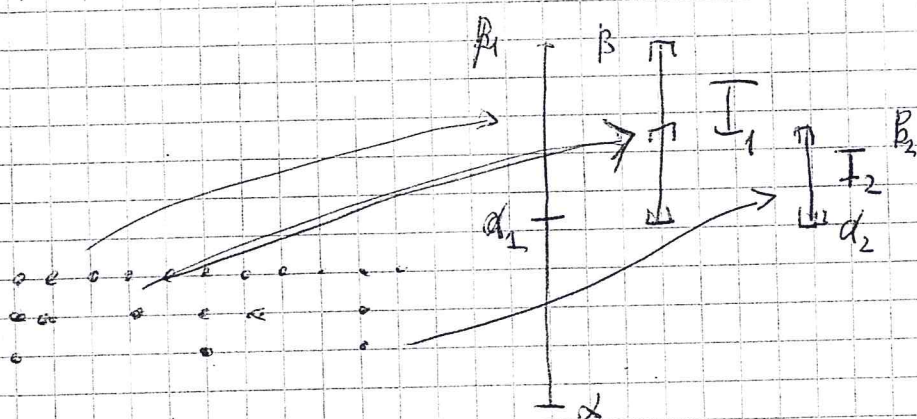
Da qui $\exists$ infiniti indici (n_1) naturali

per cui $a_{n_1} \in I_1$

Ripeto il ragionamento sostituendo al
posto del "vecchio" intervallo $[a, b]$

l'intervallo I_1 , e al posto di (a_n)

la sotto successione (a_{n_1})



$$I_1 = [a_1, b_1]$$

$$I_2 = [a_2, b_2]$$

$$a_1 = a_2 = \frac{a+b}{2}$$

$$b_1 = b, b_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}$$

Da qui esistono infiniti indici $\sqrt[n_2]{n_1}$

scelti tra gli infiniti $\sqrt[n_1]{n_1}$ di prima,

per cui a_{n_2} casca in una delle
due m.e. di I_1 ; chiamiamo ora

I l'intervallo I_{n_2} e la sotto successione (n_2)

L'estensione di sottosuccessioni sta almeno
in $\mathbb{N} \Rightarrow$

Dato che

$\forall k \in \mathbb{N}, \dots, \exists$ una sottosucc. (n_k)

di interi;

$$(n_k) \in (n_{k-1})$$

$$(n_0) = \mathbb{N},$$

ed esiste $I_k \subset [\alpha, \beta] = I_0$

$$I_k \subset I_{k-1}$$

(anzi I_k è una delle due metà
di I_{k-1}) tali che esistono infiniti interi n_k

$$\text{in cui } q_{n_k} \in I_k$$

Questo si dimostra per induzione su k :

$k=1$ lo abbiamo fatto; e il passo
 $k-1 \rightarrow k$ si fa come visto prima.

Chiamiamo

$$I_k = [\alpha_k, \beta_k] \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\text{lunghezza}(I_k) = \beta_k - \alpha_k = \frac{\beta - \alpha}{2^k}$$

La successione (α_k) è monotona crescente

La successione (β_k) è monotona decrescente

$$\exists \lim_{k \rightarrow +\infty} \alpha_k = l^- \quad (\text{teo 9.9.1})$$

$$\exists \lim_{k \rightarrow +\infty} \beta_k = l^+ \quad (\text{teo 9.9.1})$$

$$\begin{array}{ccc} \alpha \leq \alpha_k \leq \beta & \alpha \leq l^- \leq \beta \\ \Rightarrow & \\ \alpha \leq \beta_k \leq \beta & \alpha \leq l^+ \leq \beta \end{array}$$

$$\alpha_k \leq \beta_k \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad l^- \leq l^+$$

$$\text{Ma } \lim_{k \rightarrow +\infty} (\beta_k - \alpha_k) = (\beta - \alpha) \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^k} = 0$$

$$\Rightarrow l^- - l^+ = 0 \quad \Rightarrow \quad l^- = l^+$$

Chiamiamo $l := l^- (= l^+)$. La
spunta di l è il limite cercato di
una sotto succ. di (a_n) .

Resta da costruire $\sqrt{\cdot}$ sotto successione
di (a_n) convergente a l .

Sia $k \in \mathbb{N}$, definisco induttivamente

$$n_k = \min \{ n \in \mathbb{N} : n > n_{k-1}, a_n \in I_k \}$$

Il minimo $\exists$? Sì, per la proprietà
del buon ordinamento di $\mathbb{N}$, poiché

$$\{ \dots \} \neq \emptyset$$

$$\text{con } \exists n \in \mathbb{N} : n > n_{k-1}, a_n \in I_k,$$

$$k=10 \quad n_{k-1} = n_9 = 10^{17}$$

che è vero perché $a_n \in I_k$ è verificato
per sufficienti indici per costruzione (vedi
fine di pag 3)

(n_k) è una succ. di numeri naturali
tale che $n_k > n_{k-1} \quad \forall k \in \mathbb{N}$

Sono dunque sicuro che (a_{n_k}) è
una sotto succ. di (a_n) .

Indica

$$a_{n_k} \in I_k = [\alpha_k, \beta_k] \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\alpha_k \leq a_{n_k} \leq \beta_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow k \rightarrow +\infty & \downarrow k \rightarrow +\infty & \downarrow k \rightarrow +\infty \\ l & l & l \end{array}$$

□

Def 13.6.1 Sia $X \subseteq \mathbb{R}$. Si dice
che X è compatto per successioni

(o sequenzialmente compatto) se

da ogni sotto successione di punti di X

si può estrarre una sotto successione

convergente a un punto di X .

oss 13.6.1 $\mathbb{R}$ non è seq. compatto,

Teo 13.6.2 (B.W.) Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\alpha \leq \beta$, allora $[\alpha, \beta]$ è seq. compatto,

Def 13.7.1 Sia $X \subseteq \mathbb{R}$. Si dice

che X è chiuso (i $\mathbb{R}$) in

successione (o seq. chiusa)

se presa una successione di

punti di X convergente a $l \in \mathbb{R}$

allora $l \in X$.

Es 13.7.1 $[0, 1)$ è seq. chiusa ($i \mathbb{R}$)? NO

$$a_n = 1 - \frac{1}{n} \in [0, 1) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$a_n \rightarrow 1 \notin [0, 1)$$

$[0, 1]$ è seq. chiusa ($i \mathbb{R}$)? SI

$$0 \leq a_n \leq 1$$



$$0 \leq l \leq 1$$

Conclusione: $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha \leq \beta;$ $[\alpha, \beta]$ seq. chiusa

$\left. \begin{array}{l} [\alpha, \beta) \\ (\alpha, \beta] \\ (\alpha, \beta) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{non seq.} \\ \text{chiusa.} \end{array}$

18

$\mathbb{Q} \cap [0,1]$ è seq. chiusa?

No, per densità (Teo 4.1.1)

$\forall x \in [0,1]$ è limite di una successione di numeri in $\mathbb{Q} \cap [0,1]$

Si chiama $X \subseteq \mathbb{R}$ generato non è detto che sia seq. chiusa, è

habitualmente considerata $\overline{X}$, che è

la definizione di + piccolo insieme seq. chiusa $\supseteq X$.

$$\text{se } X = [0,1) \Rightarrow \overline{X} = [0,1]$$

$$\text{se } X = (\alpha, \beta) \Rightarrow \overline{X} = [\alpha, \beta]$$

$$\text{se } X = \mathbb{Q} \cap [0,1] \Rightarrow \overline{X} = [0,1]$$

Def 13.0.1 Sia $X \subseteq \mathbb{R}$,

si definisce $\overline{X}$ la chiusura seq. di X

(in $\mathbb{R}$) come: $\{x \in \mathbb{R} : \exists (a_n) \subset X, a_n \rightarrow x\}$

$\bar{X}$ sono tutti quei numeri reali
 ottenibili come limite di successioni
 di punti di $X \Rightarrow$ Sempre vero $\bar{X} \supseteq X$

ES 13.1 $X = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$

X è chiuso? NO

$\bar{X} = X \cup \{0\}$?

OS 13.9.1

$[0, 1]$ è s. chiuso in $\mathbb{R}$? Si

è s. compatto? Si

Il teo di BW dice che:

gli intervalli chiusi e limitati di $\mathbb{R}$
 sono seq. compatti? Si

Relazioni:

Seq. chiuso in $\mathbb{R}$

Seq. cpt

+ limitato
 + intervallo

$X = \mathbb{R}$ è seq. chiuso in $\mathbb{R}$? Si

ma non è seq. cpt.

Prop 13.10.1 Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ s. completo.

Allora X è s. chiuso.

Dwi

$$\boxed{\text{s. Cpt} \implies \text{s. chiuso}}$$

$$\boxed{\text{s. Cpt} \not\Leftarrow \text{s. chiuso}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Int. s. chiuso} \\ \text{limitati} \end{array} \implies \text{s. Cpt}}$$

Sia (a_n) una succ. di punti di X

$a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$, Dato che $l \in X$.

Si ha che X è s. cpt, da (a_n) lo si
esprime una sottos. convergente a un
punto di X . Dato che il limite della

sottoma. di X deve essere =
limite della successione (indice ma
in $H^1(X, \mathbb{C})$), ne segue che
tale limite $\in X$. Dunque
 X è seq. chiuso. $\square$