

Lezione 12

17/10/2019

9-11

Es 12.1.1

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{4^n} \\ \frac{5}{4^n} \end{cases}$$

$n \in \mathbb{N}, n \text{ pari}$

$n \in \mathbb{N}, n \text{ dispari}$

evidentemente $a_n \rightarrow 0$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} \frac{\frac{5}{4^{n+1}}}{\frac{1}{4^n}} \\ \frac{\frac{1}{4^{n+1}}}{\frac{5}{4^n}} \end{cases}$$

$n \text{ pari}$

$n \text{ dispari}$

$$= \begin{cases} \frac{5}{4} \\ \frac{1}{5 \cdot 4} \end{cases}$$

$n \text{ pari}$

$n \text{ dispari}$

che non è def. $\leq q < 1$

$$\sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} \frac{1}{4} \\ \frac{\sqrt[n]{5}}{4} \end{cases}$$

$n \text{ pari}$

$n \text{ dispari}$

che è def. $\leq q < 1$, dato che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{5} = 1, \text{ dunque } \frac{\sqrt[n]{5}}{4} \leq \frac{1}{2}$$

def. n. Dal criterio della radice la successione

Abbiamo dunque un esempio di succ.

(a_n) per cui

$$\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1 \quad \text{def. n}$$



$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q' < 1 \quad \text{def. n}$$

Domanda: è in caso possibile che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q' < 1 \quad \text{def. n}$$



$$\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1 \quad \text{def. n} \quad ?? \quad \text{Si, infatti:}$$

ES 12.2.1 (criterio rapporto $\Rightarrow$ radice)

Sia (a_n) una successione reale, $a_n > 0 \quad \forall n$

$$\text{Supponiamo} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1$$

$$\text{Allora} \quad \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$$

E analogamente se $q > 1$

Linea di convergenza (sistemi a cascata)
 dell'angolo

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n}_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n > \bar{n}_\varepsilon \text{ si ha}$$

$$a_n(q - \varepsilon) < a_{n+1} < a_n(q + \varepsilon)$$

Ripetendo

$$a_{\bar{n}_\varepsilon+1}^{n-\bar{n}_\varepsilon+1}(q - \varepsilon) < a_{n+1} < a_{\bar{n}_\varepsilon+1}^{n-\bar{n}_\varepsilon+1}(q + \varepsilon)$$

$\Downarrow$

$$\sqrt[n+1]{a_{\bar{n}_\varepsilon+1}^{n-\bar{n}_\varepsilon+1}}(q - \varepsilon) < \sqrt[n+1]{a_{n+1}} < \sqrt[n+1]{a_{\bar{n}_\varepsilon+1}^{n-\bar{n}_\varepsilon+1}}(q + \varepsilon)$$

$\downarrow$ $\frac{n-\bar{n}_\varepsilon+1}{n+1}$ $\downarrow$ $\frac{n-\bar{n}_\varepsilon+1}{n+1}$

$\sqrt[n+1]{a_{\bar{n}_\varepsilon+1}} \xrightarrow{\log 5} 1$ $\downarrow$ $q - \varepsilon$ $\sqrt[n+1]{a_{\bar{n}_\varepsilon+1}} \xrightarrow{\log 5} 1$ $\downarrow$ $q + \varepsilon$

$$\forall \varepsilon > 0$$

$$q - \varepsilon \leq \liminf_n \sqrt[n+1]{a_{n+1}} \leq \limsup_n \sqrt[n+1]{a_{n+1}} \leq q + \varepsilon$$

Ma prendendo $\varepsilon \rightarrow 0^+$ deduco

$$\liminf_n \sqrt[n+1]{a_{n+1}} = \limsup_n \sqrt[n+1]{a_{n+1}} = q$$

□

Es 12.4.1 for $x > 0$

Allora $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x} = 1$

Oss $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} = e^{\log(x^{\frac{1}{n}})}$
 $= e^{\frac{1}{n} \log x}$
 $= e^{\frac{\log x}{n}}$

Se $x = 1$ $\sqrt[n]{x} = 1 \rightarrow 1$ obviously

Facciamo il caso $x > 1$; fatto questo ho concluso, perché se

$$x \in (0, 1) \Rightarrow \frac{1}{x} > 1$$

$$\sqrt[n]{\frac{1}{x}} \rightarrow 1$$

$$\sqrt[n]{\frac{1}{x}} \Rightarrow \sqrt[n]{x} \rightarrow 1$$

Dunque supponiamo $x > 1$

$$\Rightarrow \sqrt[n]{x} > 1 \quad ; \quad \text{considero } \sqrt[n]{x} - 1 =: a_n$$

(a_n) è pertanto una succ. di numeri reali positivi. Dovo dim. che (a_n) è infinitesima.

$$1 + a_n = \sqrt[n]{x} \Rightarrow (1 + a_n)^n = x$$

Applico Bernoulli I e ho $(a_n \geq -1)$

$$(1 + a_n)^n \geq 1 + n a_n$$

$$x \geq 1 + n a_n$$



$$\frac{x-1}{n} \geq a_n \geq 0$$

$\Rightarrow$
confronto

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$$

ES

$$\sqrt[n]{n} \longrightarrow 1$$

Mostrare (la cosa) che quanto fatto sopra con n ed

$$\sqrt[n]{n} - 1 =: a_n > 0$$

(a_n) è pertanto una succ. di numeri reali positivi. Devo dim. che (a_n) è infinitesima.

$$1 + a_n = \sqrt[n]{n} \Rightarrow (1 + a_n)^n = n$$

Applico (per la 1ª volta nel CVP)

Bernoulli II, e ho $(a_n > 0)$

$$(1 + a_n)^n \geq 1 + \frac{n(n-1)}{2} a_n^2$$

||

n

$$2(n-1) \geq n(n-1) a_n^2$$

$$\frac{2}{n} \geq a_n^2$$

Confronto
 $\Rightarrow$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n^2 = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0.$$

TABELLINA: $\lim_n \frac{n^\alpha}{n!} = 0 \quad \forall \alpha > 0$

$$\lim_n \frac{n^n}{n!} = +\infty, \quad \lim_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e, \quad \lim_n \sqrt[n]{n} = 1$$

ES (case)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^{10^5}} = 1$$

Più in generale $\forall \alpha > 0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^\alpha} = 1$$

ES (case)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$$

Idea so che

$$\frac{n^n}{e^n} \leq n! \leq \frac{n^n}{e^n} n e$$

$$+\infty \leftarrow \frac{n}{e} \leq \sqrt[n]{n!} \leq \frac{n}{e} \sqrt[n]{n} \sqrt[n]{e}$$

$$\underline{\text{ES}} \text{ (case)} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}$$

$$\frac{1}{e} \leq \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \leq \frac{1}{e} \sqrt[n]{n} \sqrt[n]{e}$$

$$\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = a_n$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} =$$

$$= \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{n+1}{(n+1)^n (n+1)} n^n$$

$$= \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \left(\frac{n+1-1}{n+1} \right)^n = \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)^n$$

↓ CAS
 $\frac{1}{e}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow \frac{1}{e}$$

Criterio rapporto $\rightarrow$ radice
 $\Rightarrow$

$$\sqrt[n]{a_n} \rightarrow \frac{1}{e}, \quad e \text{ abbiamo}$$

Wolfram

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \frac{1}{e}$$