

Lezione 11

16/10/19

9-13

Venerdì

18/10/19

Lezione ore 14.00

al posto di mercoledì 6/11/19

Resta da dim.  $\lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} P_{n,k} \geq e =$

$$= \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!}$$

Se  $m < n$  si ha

$$\sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} P_{n,k} < \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} P_{n,k}$$

Passando al  $\lim_{m \rightarrow +\infty}$  con  $m$  fisso

(11.11)  $\lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} P_{n,k} \leq \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} P_{n,k}$

Dato che "lim  $\sum$  finito =  $\sum$  finito dei limiti"  
(e tutti i limiti  $\exists$ )

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} P_{n,k} = \sum_{k=0}^m \left[ \lim_{m \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{k!} P_{n,k} \right) \right]$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{k!} \lim_{m \rightarrow +\infty} P_{n,k} = \frac{1}{k!} \lim_{m \rightarrow +\infty} \left\{ \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)}_{\text{prod. di } k \text{ termini}} \right\} \\ & = 1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1 = 1 \end{aligned}$$



da (11.1.1) deduco  $\forall m \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} P_{n,k}$$

$\Downarrow$

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} = \sup_{m \in \mathbb{N}} \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} \leq \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} P_{n,k}$$

$$\parallel$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e$$

$$\parallel$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$$

Risultato finale (Limite notevole)

$$e := \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Es 11.2.1 Calcola

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+4}$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+4} = \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}_{\rightarrow e} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)}_{\rightarrow 1} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)}_{\rightarrow 1} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)}_{\rightarrow 1} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)}_{\rightarrow 1}$$

Limite (Prodotto finito) = Prodotto finito (limite), vedi F3



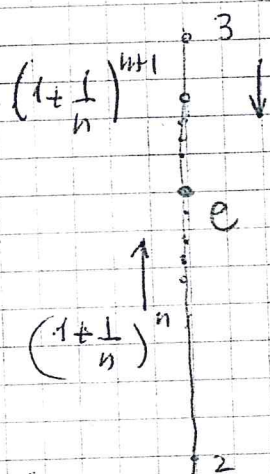
Abbiamo visto che  $n \rightarrow \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  è

crescente ( $\uparrow e$ )

Esercizio 11.3.1 Dimostrare che

$n \rightarrow \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$  è decrescente

(Dunque  $\downarrow e$ )



Devo dim. che  $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

$$\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2} < \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$$

$$\frac{(n+2)^{n+2}}{(n+1)^{n+2}} < \frac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+1}}, \quad n^{n+1} (n+2)^{n+2} < (n+1)^{n+1} (n+1)^{n+2}$$

$$n^{n+1} (n+2)^{n+2} < (n+1) \left( (n+1)^{n+1} \right)^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$(n+2)^n \left( n(n+2) \right)^{n+1} < (n+1) \left( (n+1)^{n+1} \right)^2 \\ = (n+1)^n \left( (n+1)^2 \right)^{n+1}$$



$$\frac{n+2}{n+1} < \underbrace{\left( \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} \right)^{n+1}}_{n+1}$$

$$\left( 1 + \frac{1}{n(n+2)} \right)^{n+1}$$

2nd DIT. BERNOLLI I:  $(1+x)^n \geq 1+nx$   $\forall n \in \mathbb{N}$   
 $\forall x \geq -1$

(ES. 2.7.1): la applichiamo

con la scelta:  $x = \frac{1}{n(n+2)} \quad (\geq -1)$

e  $n+1$  al posto di  $n$

$$\Rightarrow \left( 1 + \frac{1}{n(n+2)} \right)^{n+1} \geq 1 + \frac{(n+1)}{n(n+2)}$$

Basta dire  $1 + \frac{n+1}{n(n+2)} > \frac{n+2}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}$

per concludere. Devo dunque dire:

$$\frac{n+1}{n(n+2)} > \frac{1}{n+1}$$

$$(n+1)^2 > n(n+2)$$

$$\overset{H}{n^2 + 2n + 1}$$

$$\overset{H}{n^2 + 2n}$$

□



Esercizio 11.5.1 (Una prima stima del fattoriale)

$$(11.5.1) \quad \frac{n^n}{e^n} \leq n! \leq \frac{n^n}{e^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Se questo è vero, allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty \quad (11.5.1)$$

cosa che si può dimostrare anche così:

$$\frac{n^n}{n!} = \frac{n \cdot n \cdot \dots \cdot n}{n(n-1) \cdot \dots \cdot 1}$$

$$= \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n}{n-2} \cdot \dots \cdot \frac{n}{2} \cdot n > 1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1 \cdot n \rightarrow +\infty$$

rotta dirug.

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n}{n!} \geq +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty$$

Dalla (11.5.1) segue

$$\frac{1}{e^n} \leq \frac{n!}{n^n} \leq \frac{ne}{e^n}$$

$\downarrow$                       dunque  $\downarrow$                        $\downarrow$   
 $0$                        $0$                        $0$



6

Dimostriamo la (11.5.1): Cominciamo con

$$n! \leq \frac{n^n}{e^n} n e \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Induzione su  $n$ :  $n=1$   $1=1! \stackrel{?}{\leq} \frac{1^1}{e^1} 1 \cdot e = 1$

Supponiamo ora  $n! \leq \frac{n^n}{e^n} n e$

obteniamo dim.

$$(n+1)! \leq \frac{(n+1)^{n+1}}{e^{n+1}} (n+1) e$$

$$(n+1)! = (n+1) n! \stackrel{\substack{\text{ipotesi} \\ \text{induttiva}}}{\leq} (n+1) \frac{n^n}{e^n} n e$$

Basta dim.  $(n+1) \frac{n^n}{e^n} n e \leq \frac{(n+1)^{n+1}}{e^{n+1}} (n+1) e$

$$\Leftrightarrow n^n n \leq \frac{(n+1)^{n+1}}{e^{n+1}}$$

$$\Leftrightarrow n^{n+1} \leq \frac{(n+1)^{n+1}}{e^{n+1}}$$

$$\Leftrightarrow e \leq \left( \frac{n+1}{n} \right)^{n+1} = \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1}$$



È interessante osservare che la monotonìa  
decrescente di  $(1 + \frac{1}{n})^{n+1}$  + induzione

$\Rightarrow$  stima non banale del fattoriale

dall'alto,  $n! \leq \frac{n^n}{e^n}$  ne

Per concludere la dim. dell'esercizio 11.5.1

abbiamo visto

$$\frac{n^n}{e^n} \leq n! \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Induzione su  $n$ :  $n=1$

$$\frac{1^1}{e^1} \leq 1! = 1$$

$$\frac{1}{e} \leq 1 \quad \text{si} \quad (e > 2)$$

Supponiamo vero  $\frac{n^n}{e^n} \leq n!$

Devo dim.

$$\frac{(n+1)^{n+1}}{e^{n+1}} \leq (n+1)!$$

$$(n+1)! = (n+1) n! \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ip. ind.}}}{\geq} (n+1) \frac{n^n}{e^n}$$

Basta dim.

$$(n+1) \frac{n^n}{e^n} \geq \frac{(n+1)^{n+1}}{e^{n+1}}$$



$$n^n \geq \frac{(n+1)^n}{e}$$

$$e \geq \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \text{si}$$

□

La formula di STIRLING migliora

la (11.5.1), ma non la faremo.

ES 11.8.1 (Criterio del rapporto per le successioni)

Sia  $(a_n)$  successione di numeri  $> 0$

Supponiamo che  $\exists q \in [0, 1)$  tale che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q \quad \text{def. - } n$$

$$\text{Allora } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$$

Se  $\exists q > 1$  tale che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq q \quad \text{def. - } n$$

$$\text{Allora } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty.$$



ES 11.9.1 (Criterio delle radici per successioni)

Sia  $(a_n)$  succ. di numeri reali  $\geq 0$ ;

Supponiamo che  $\exists q \in [0, 1)$  tale che

$$\sqrt[n]{a_n} \leq q \quad \text{dof. } n$$

Allora  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ .

Se invece  $\exists q > 1$  tale che

$$\sqrt[n]{a_n} \geq q \quad \text{dof. } n$$

allora  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$ .

ES 11.9.2

$\lim_{n \rightarrow +\infty}$

$$\frac{(n!)^{n-1} - ((n-1)!)^n}{((n-1)!(n-1)!)^{n-1}}$$

$$= \frac{(n(n-1)!)^{n-1} - ((n-1)!)^n}{((n-1)!(n-1)!)^{n-1}}$$

$$= \frac{(n-1)!^{n-1} (n^{n-1} - (n-1)!)}{(n-1)!^{n-1}} = \frac{n^{n-1} - (n-1)!}{1}$$



$$\frac{n^{n-1} - (n-1)!}{(n-10)^{n-1}} = \frac{n^{n-1} \left( 1 - \frac{(n-1)!}{n^{n-1}} \right)}{(n-10)^{n-1}}$$

$$= \frac{n^{n-1}}{(n-10)^{n-1}} \left( 1 - \frac{(n-1)!}{n^{n-1}} \right); \text{ ma}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n-1)!}{n^{n-1}} = 0 \quad \text{dalla (11.5.1)}$$

Resto da trovare  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{n}{n-10} \right)^{n-1}$

$$\left( \frac{n}{n-10} \right)^{n-1} = \left( \frac{n-10+10}{n-10} \right)^{n-1}$$

$$= \left( 1 + \frac{10}{n-10} \right)^{n-1}$$

$$= \left( 1 + \frac{10}{n-10} \right)^{n-10+9}$$

$$m = n-10$$

$$= \underbrace{\left( 1 + \frac{10}{m} \right) \left( 1 + \frac{10}{m} \right) \cdots \left( 1 + \frac{10}{m} \right)}_{9 \text{ volte}}$$



Il limite finale sarà

$$= \lim_{m \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{10}{m} \right)^m$$

Il problema è trovare, per  $x > 0$

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{x}{m} \right)^m \quad x > 0$$

1ª cosa da fare:

$$\left( 1 + \frac{x}{m} \right)^m = \left( 1 + \frac{x}{m} \right)^{\frac{m}{x} \cdot x}$$

Resta da

si tratta di trovare  $\lim_{m \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{x}{m} \right)^{\frac{m}{x}}$ ,

e il risultato sarà poi elevato alla  $x$ .

Abbiamo il problema

$$\left( 1 + \frac{x}{m} \right)^{\left[ \frac{m}{x} \right]} \leq \left( 1 + \frac{x}{m} \right)^{\frac{m}{x}} \leq \left( 1 + \frac{x}{m} \right)^{\left[ \frac{m}{x} \right] + 1}$$
$$= \left( 1 + \frac{x}{m} \right)^{\left[ \frac{m}{x} \right]} \underbrace{\left( 1 + \frac{x}{m} \right)}_{\downarrow 1}$$

Ci si riduce allo studio di



$$\left(1 + \frac{x}{m}\right)^{\left[\frac{m}{x}\right]} = \left(1 + \frac{1}{\frac{m}{x}}\right)^{\left[\frac{m}{x}\right]}$$

$$\leq \left(1 + \frac{1}{\left[\frac{m}{x}\right]}\right)^{\left[\frac{m}{x}\right]}$$

$$e^{\left[\frac{m}{x}\right]} \left(1 + \frac{1}{\frac{m}{x}}\right)^{\left[\frac{m}{x}\right]} \geq \left(1 + \frac{1}{\left[\frac{m}{x}\right] + 1}\right)^{\left[\frac{m}{x}\right]}$$

$$\text{con} \quad \left(1 + \frac{1}{\left[\frac{m}{x}\right] + 1}\right)^{\left[\frac{m}{x}\right]} \leq \left(1 + \frac{x}{m}\right)^{\left[\frac{m}{x}\right]} \leq \left(1 + \frac{1}{\left[\frac{m}{x}\right]}\right)^{\left[\frac{m}{x}\right]}$$

↓  
e

↓  
e

Finalmente  $\forall x > 0$  (anche  $x \geq 0$ )

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

$x < 0$  a cosa.



La base delle serie a termini positivi

13

Ci permette una descrizione dei numeri reali positivi.

$$\pi = 3,141592\dots$$

$$\pi = 3 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2} + 1 \cdot 10^{-3} + \dots$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n 10^{-n} \quad \begin{matrix} c_n \in \mathbb{N} \\ 0 \leq c_n < 10 \end{matrix} \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

$$\text{Se } c_0 = 1, \quad c_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n 10^{-n} = 1 + \frac{0}{10} + \frac{0}{10^2} + \dots = 1$$

$$\text{Se } c_0 = 0, \quad c_n = 9 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n 10^{-n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{9}{10^n} = 9 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{10^n}$$

$$= 9 \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n = 9 \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n - 1 \right)$$

$$= 9 \left( \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} - 1 \right) =$$

$$= 9 \left( \frac{10}{9} - 1 \right) = 1$$

$$1 = 1,0000 \dots = 0,999\dots$$



Sia  $b \in \mathbb{N}$ ,  $b > 1$  (esempio  $b=10$ )  
(di rappresentazione dei numeri reali)

Teo. 11.14.1 Sia  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x \geq 0$ . Allora esiste

un'unica successione  $(c_n)$  tale da

1)  $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \quad c_n \in \mathbb{N}$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq c_n < b$$

2)  $\forall m \in \mathbb{N} \quad \exists n \in \mathbb{N} : c_n < b-1$

(definitivamente i  $c_n$  non sono tutti  
 $= b-1$ )

3)  $x = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n b^{-n} = c_0, c_1 c_2 c_3 \dots$   
in base  $b$

W反之, data una succ.  $(c_n)$  verificando

1) e 2), la serie nel membro

destro della 3) converge a un numero  
reale.

Oss 11.14.1 La dimostrazione del viceversa è

facile, mentre è difficile la dim. della prima e  
sufficiente: questo è una affermazione di esistenza  
e unicità.



15

Non facciamo qui la dimostrazione completa, ma:

$$C_0 = [x] = \text{parte intera di } x = \min \{ N \in \mathbb{N} \cup \{0\} : N \leq x \}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \quad C_{n+1} = [b^{n+1}x] - b[b^n x]$$

Ad esempio  $C_1 = [bx] - b[x]$

Se  $b=10$   $C_1 = [10x] - 10[x]$

$x = \sqrt{2}$   $C_0 = 1$ ,  $C_1 = [10\sqrt{2}] - 10[\sqrt{2}]$

$$= [10\sqrt{2}] - 10 = 14 - 10 = 4$$

$$\begin{array}{ccc} (14)^2 & < 10^2 \cdot 2 < & (15)^2 \\ \text{"} & & \text{"} \\ 196 & 200 & 225 \end{array}, \quad C_2 = [100\sqrt{2}] - 10[10\sqrt{2}]$$

$$= [100\sqrt{2}] - 140$$

$$= 141 - 140 = 1$$

$$\begin{array}{ccc} (141)^2 & < 10^4 \cdot 2 < & (142)^2 \\ 19881 & 20000 & 20164 \end{array}$$

I  $(C_n)$  sono i coefficienti cercati.



11.16.1 Teo  $\sqrt{}$  (di compattezza di Bolzano-Weierstrass)

16

Sia  $(a_n)$  una successione di numeri reali  
limita<sup>\*</sup>, cioè  $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\alpha \leq a_n \leq \beta \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Allora  $(a_n)$  ammette una sottosuccessione  
convergente a un numero reale  $\in [\alpha, \beta]$ .

ES 11.16.1  $a_n = (-1)^n$  è limitata

ma è convergente. Ma

$$a_{2n} = 1 \longrightarrow 1, \text{ dunque}$$

la sottosuccessione ottenuta prendendo gli  
gli indici è convergente (a 1), però  
costantemente = 1.

\* limitata vuol dire NON CHE AMMETTE  
LIMITE, ma che è limitata<sup>SR</sup> uniformemente che