

Lezione 10 15/10/19 9-11

1

Venerdì 11-13 CORSO DI SOSTEGNO
AULA CD

Teo 10.1.1 (permanenza del segno)

Sia (a_n) una succ. con $a_n \in \mathbb{R}$

e supponiamo

$$l = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \in (0, +\infty]$$

Allora definitivamente $a_n > 0$, cioè

$$\exists \bar{n} \in \mathbb{N} : a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}, n > \bar{n}$$

Il viceversa in generale non è vero:

cioè se def. n $a_n > 0$

e $\exists l = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ non è detto
che $l > 0$: per esempio

$$a_n = \frac{1}{n} \quad a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$l = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

« le disuguaglianze strette valide per a_n ,
passando al limite in generale diventano
larghe »

Dim (Teo 10.1.1). Facciamo il caso $l < +\infty$,
(il caso $l = +\infty$ è più facile).

Prendo $\varepsilon \in (0, l)$, ad esempio $\varepsilon = l/2$
anch'è bene. Per def. di limite,

$$\exists \bar{n} \in \mathbb{N}: \forall n \in \mathbb{N} \quad n > \bar{n} \quad \& \quad l_0$$

$$|a_n - l| < \varepsilon, \text{ cioè}$$

$$0 < l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon$$

↑
perché per scelta $\varepsilon < l$. $\square$

Oss 10.2.1 Tornando al criterio del
rapporto e della radice per le serie a
termini positivi, si ha anche:

Teo 10.2.1 Sia (a_n) una succ. di
numeri positivi. Se $\exists q \in [0, 1)$ tale
che $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$ (10.2.1)

allora $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty$.

Se $\exists q > 1$ tale che $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq q$

allora $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty$

Oss se vale l'ipotesi (i) Teo 7.2.1 ³

non è detto che valga (10.2.1)

(ma quasi). Se vale (10.2.1)

vale invece la (i) Teo 7.2.1, un po' più modesto

Inoltre (i) del Teo 7.2.1 $\nRightarrow$

$\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ se può lo che

$\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ allora vale (10.2.1).

Wiering, k vale (10.2.1), $\forall \varepsilon > 0$

$$\text{def. } n \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q + \varepsilon$$

prendendo $\varepsilon > 0$ in modo che $q + \varepsilon < 1$

vale allora (i) Teo 7.2.1 con $q + \varepsilon$ al

posto di q .

Il vero modo di rendere i due enunciati equivalenti è quello di partire alla (10.2.1) la disuguaglianza

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$$

PENSARCI PER CASA.

Stime osservabili valgono nel caso (ii)

teo 7.2.1, e per il valore della radice
 M -esima.

Es 10.3.1

Dimostrare che

$$\sum_{n \geq 1} \frac{2n+1}{2^n} < +\infty$$

$= a_n$

Un modo più facile:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2(n+1)+1}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{2n+1}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2n+3}{2n+1}$$

$$\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2} = q < 1$$

teo 10.2.1



$$\sum_{n \geq 1} a_n < +\infty$$

Fatti utili (in corso): (F1) Siano $(a_n), (b_n)$

due successioni di numeri reali.

Se $a_n \leq b_n$ def- n (o anche $a_n < b_n$ def- n)

allora

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} b_n$$

In particolare, se (a_n) e (b_n) ammettono limiti,

allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$$

(F2) Se $(a_n), (b_n), (c_n)$ succ. reali

$$a_n \leq b_n \leq c_n \quad \text{def-n}$$

$$\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \in [-\infty, +\infty] = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$$

$$\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n \in [-\infty, +\infty]$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$$

Allora $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \quad \left(= \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n \right)$$

(F3) Se $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n =: l_a, \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n =: l_b$

$$\text{allora } a_n - b_n \longrightarrow l_a - l_b$$

tranne che nel caso $l_a = +\infty, l_b = +\infty$

e via di seguito per $a_n + b_n$.

$$a_n \cdot b_n \longrightarrow l_a \cdot l_b \quad \text{tranne che } l_a = 0, l_b = \pm \infty$$

Oss 10.5.1.

$$\text{Se } a_n \rightarrow 0 \implies a_n \cdot (-1)^n \rightarrow 0$$

$$\text{Se } a_n \rightarrow 1 \implies a_n \cdot (-1)^n \text{ non ha limite}$$

$$\text{Se } a_n \rightarrow 0 \text{ su } a_n \cdot (-1)^n \cdot n \text{ non ha limite in generale}$$

però dare un'idea: esempio se $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ allora
 $a_n \cdot (-1)^n = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot (-1)^n$ $\begin{cases} \text{lim sup} = +\infty \\ \text{lim inf} = -\infty \end{cases}$

$$\text{Se } a_n = \frac{1}{n^{3/2}} \text{ allora } a_n \cdot (-1)^n \rightarrow 0$$

$$(F_4) \text{ Se } a_n \rightarrow 0 \text{ e } b_n \text{ è limitata; allora } \exists C > 0$$

$$\exists \bar{n} \in \mathbb{N}; |b_n| \leq C \quad \forall n \in \mathbb{N}, n > \bar{n}$$

$$\text{Allora } a_n \cdot b_n \rightarrow 0$$

Esercizio 10.5.1 $\rightarrow$ vedi Esercizio 6.7.1
 Dimostrare che, posto

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Si ha:

$$(i) \quad a_n < e_n := \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$(ii) \quad a_n < a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$(iii) \quad \dots$$

Il punto (iii) permette di dare un'altra
definizione di e : Si può definire

$$e := \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$$

$$(i) \quad a_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n =$$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} 1^{n-k}$$

formula (2.13.1) con la scelta

$$a = \frac{1}{n}, \quad b = 1$$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k}$$

che deve confrontare con $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} =: e_n$

$$= \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{1}{n^k}$$

Sono k
fattori

$$= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} p_{n,k}$$

$$p_{n,k} := \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} = \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \dots \cdot \frac{n-k+1}{n}$$

$$P_{n,k} = 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$$

Dunque $P_{n,k} < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} P_{n,k}}_{a_n} < \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}}_{e_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow a_n < e_n \quad \forall n \in \mathbb{N}, \text{ per (i).}$$

In particolare, (a_n) è superiormente limitata.

(ii) devo dim. che $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} P_{n,k} < \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} P_{n+1,k}$$

$$P_{n,k} = 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right), \quad P_{n+1,k} = 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right)$$

$$1 - \frac{1}{n+1} > 1 - \frac{1}{n}, \quad 1 - \frac{2}{n+1} > 1 - \frac{2}{n}, \quad \dots$$

$$\Rightarrow P_{n+1,k} > P_{n,k}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} P_{n,k} < \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} P_{n+1,k} < \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} P_{n+1,k}$$

Da (ii) segue che (a_n) è strettamente
crescente. Del Lemma 9.9.1

$$\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$$

Inoltre, da (F1) di pag 3,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \leq e$$

Resta da dire.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \geq e.$$