Compito 15/4/19, Analisi Matematica 1

Nome (in stampatello): Cognome (in stampatello):

Crediti: facoltativo: posta elettronica in stampatello

Nota: non si possono consultare libri, appunti, macchine elettroniche di qualunque genere per inviare o ricevere informazioni, o per fare calcoli. Se uno studente si vuole ritirare, deve comunque consegnare il compito. CONSEGNARE SOLO I FOGLI SPILLATI.

1) Calcolare il

$$\lim_{x\to 0} \frac{-(1-2x)^{1/4}+(x^2+1)^{1/3}}{x^4+x}$$

$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + o(x)$ per $x \to 0$

$$\Longrightarrow (1+x^2)^{1/3} - (1-2x)^{1/4} = 1 + \frac{1}{3}x^2 + o(x^2)$$

$$- \left(1 - \frac{x}{2} + o(x)\right) = \frac{x}{2} + o(x)$$

Il limite cercato è $= \lim_{x\to 0} \dfrac{\frac{x}{2}+o(x)}{x+x^4} = \dfrac{1}{2}$

2) Studiare la natura della serie
$$\sum_{n=4}^{+\infty} \frac{(n!)^2 j^n (n-2)}{(2n)!}$$
per $j = 2$ e $j = 3$.

criterio del rapporto asintotico:

per $J = 2$:
$$\frac{2^{n+1}(n-1)\left[(n+1)!\right]^2}{(2(n+1))!} \cdot \frac{(2n)!}{2^n (n-2)(n!)^2}$$

$$= 2\,\frac{(n-1)}{(n-2)}\,\frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} \longrightarrow \frac{1}{2} < 1$$

dunque la serie converge.

Analogamente per $J = 3$ (limite del quoziente è $\frac{3}{4} < 1$)

3) Studiare la funzione

$$f(x) = \int_0^x \frac{\log(t^2+1)}{t\sqrt{3-t}}\, dt$$

indicandone il campo di esistenza, i relativi limiti, specificandone la monotonia, i massimi e minimi locali e assoluti e i loro valori. Determinare inoltre l'ordine e la parte principale dell'infinitesimo $f(x)$ per $x \to 0$. Disegnare infine un grafico approssimativo della funzione f.

$\mathrm{dom}(f) = \{ x \in \mathbb{R} :$ l'integrale è finito $\}$

in $t = 0$: $\dfrac{\log(1+t^2)}{t\sqrt{3-t}} \sim \dfrac{t}{\sqrt{3}}$ per $t \to 0$

in $t = 3$: $\dfrac{\log(1+t^2)}{t\sqrt{3-t}} \sim \dfrac{\log 10}{3} \dfrac{1}{\sqrt{3-t}}$ per $t \to 3^-$

$\Longrightarrow \mathrm{dom}(f) = (-\infty, 3]$, $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) \in \mathbb{R}$

Inoltre $\dfrac{\log(1+t^2)}{t\sqrt{3-t}} \sim \dfrac{1}{|t|^{3/2}} \log|t|$ per $t \to -\infty$

$\Longrightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) \in \mathbb{R}$. In ogni punto di $\mathrm{dom}(f)$

f è derivabile, e $f'(x) = \dfrac{\log(1+x^2)}{x\sqrt{3-x}}$

$(\mathrm{dom}(f') = \mathrm{dom}(f))$. Dunque

f decrescente per $x \leq 0$ $\quad x = 0$ minimo assoluto

f crescente per $x \geq 0$ $\quad f(0) = 0$

4) Dire per quali $\beta \in \mathbb{R}$ l'integrale

$$\int_0^1 \frac{-\log(1+t)+t}{\sin(t^{1+\beta})}\,dt$$

e' convergente.

$1+\beta = \alpha$

$$f(t) = \frac{t - \log(1+t)}{\sin(t^\alpha)} \in \mathcal{C}((0,1])$$

$$\sim \frac{t^2/2}{t^\alpha} = \frac{1}{2}\frac{1}{t^{\alpha-2}} \quad \text{per } t \to 0$$

$\Rightarrow$ se $\alpha - 2 < 1$ cioè $\alpha < 3$ cioè $1+\beta < 3$ cioè $\beta < 2$ l'integrale è convergente (e solo per $\beta < 2$)

5) Tra tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (derivabili il numero necessario di volte) che siano dispari, e abbiano la derivata terza identicamente nulla, trovare quella che soddisfa la condizione $\int_0^1 f(t)\, dt = 1$.

$f''' \equiv 0 \implies f(x) = ax^2 + bx + c$

f dispari $\implies f(x) = bx$

$\int_0^1 f\, dt = 1 \implies b = 2 \implies f(x) = 2x$