

$$1) \quad \sqrt[n]{2^n + 3^n} = 3 \sqrt[n]{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n} \longrightarrow 1 \cdot 3 = 3$$

Oppure, in un altro modo:

$$3^n \leq 2^n + 3^n \leq 3^n + 3^n = 2 \cdot 3^n$$

$\Downarrow$ $\sqrt[n]{\quad}$ crescente

$$3 \leq \sqrt[n]{2^n + 3^n} \leq \sqrt[n]{2} \cdot 3 \longrightarrow 3$$

$$\Rightarrow \text{dal Teo del confronto} \quad \lim_n \sqrt[n]{2^n + 3^n} = 3$$

D'altra parte, dall'esercizio 10.11.1 visto a lezione, segue $\sqrt[n]{n!} \rightarrow +\infty$.

Il limite cercato è dunque $= 0$.

Nota: $\lim_n \sqrt[n]{n!} = +\infty$ segue anche dal

teo 12.1.1 (rapporto $\rightarrow$ radice): si ha

$$\text{infatti} \quad \lim_n \sqrt[n]{n!} = \lim_n \frac{(n+1)!}{n!} = +\infty.$$

Nota: il limite segue anche facilmente dal fatto

$$\text{che} \quad \frac{2^n}{n!} \rightarrow 0, \quad \frac{3^n}{n!} \rightarrow 0, \quad \sqrt[n]{n!} \rightarrow +\infty$$

Nota Un altro modo per far l'esercizio è usare criteri
rapporto - radice

$$2) \quad 2 \leq n \text{ pari} \Rightarrow \log\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) = \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) > 0$$

$$n \geq 2 \text{ dispari} \Rightarrow \log\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) = \log\left(1 - \frac{1}{n}\right) < 0$$

Posto $a_n = \left| \log\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) \right|$, si ha

$$\log\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) = (-1)^n a_n$$

La serie in questione è dunque a segni alterni

si ha $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Per applicare il criterio

di Leibnitz (teo 15.1.1) resta da vedere che

$$a_{n+1} \leq a_n, \quad \forall n \geq 2$$

$$\text{Se } n \text{ è pari} \quad a_n = \left| \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) \right| = \log(n+1) - \log n$$

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \left| \log\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \right| = \left| \log n - \log(n+1) \right| \\ &= \log(n+1) - \log n \end{aligned}$$

$$\text{Dunque} \quad a_{n+1} = a_n.$$

$$\text{Se } n \text{ è dispari} \quad a_n = \left| \log\left(1 - \frac{1}{n}\right) \right| = \log n - \log(n-1)$$

$$a_{n+1} = \log\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) = \log(n+1) - \log n$$

$$\text{e} \quad a_{n+1} \leq a_n \quad \text{dovuta} \quad \log n - \log(n-1) \geq \log(n+1) - \log n$$

$$\text{cioè} \quad \log\left(1 + \frac{1}{n-1}\right) \geq \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) \quad \text{che è verificato,}$$

poiché $x \rightarrow \log x$ è crescente. La serie dunque converge.

Nota: si poteva anche osservare che la serie è telescopica...

Note: si poteva anche osservare che la

$$\text{serie è } \sum (\log(n+(-1)^n) - \log n), \text{ telescopica.}$$

Note La serie $\sum \log(1 + \frac{1}{n}) = +\infty$

3) Dato che $x^x = e^{x \log x}$ per $x > 0$

si ha $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = 1$.

Il limite richiesto è dunque nella forma $\frac{0}{0}$

Applicando de L'Hopital (le 26.1.1), dato che

$$\frac{d}{dx} x^x = x^x (\log x + 1)$$

$$\frac{d}{dx} e^{x^x} = e^{x^x} x^x (\log x + 1),$$

$$\text{si ha } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{x^x} - e}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(e^{x^x} x^x (\log x + 1) \right)$$

$$= -\infty$$

Anche:

$$\begin{aligned} \frac{e^{x^x} - e}{x} &= \frac{e^{e^{x \log x}} - e}{x} \\ &= e \frac{(e^{x \log x} - 1)}{x} = e \frac{(e^{x \log x} - 1)}{e^{x \log x} - 1} \frac{e^{x \log x} - 1}{x} \\ &= e \underbrace{\frac{(e^{x \log x} - 1)}{e^{x \log x} - 1}}_{\downarrow 1} \underbrace{\frac{e^{x \log x} - 1}{x \log x}}_{\downarrow 1} \log x \rightarrow -\infty \end{aligned}$$

(dato $x \log x \rightarrow 0$ per $x \rightarrow 0^+$)

$$4) \quad \text{dom } f = \mathbb{R}, \quad f \in \mathcal{C}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$$

$$f(x) > 0 \quad \forall x > 0$$

$$f(x) < 0 \quad \forall x < 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = \pm \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$$

$$\text{dom}(f') = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$f'(x) = e^{-1/x} \left(1 + \frac{1}{x} \right) \quad \forall x \in \text{dom}(f'), \quad f \in \mathcal{C}^1(\text{dom}(f'))$$

$$f'(x) = 0 \iff x = -1$$

$x = -1$ nãula di massimo globale

$$f'(x) > 0 \quad \forall x \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$$

$$f'(x) < 0 \quad \forall x \in (-1, 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = -1$$

Similmente a $-\infty$:

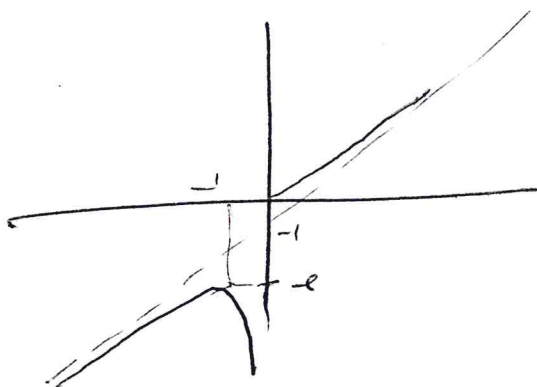
asintoto obliquo a $\pm \infty$; $y = x - 1$

$$\text{dom}(f'') = \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad f''(x) = \frac{e^{-1/x}}{x^3} \quad \forall x \in \text{dom}(f'')$$

$$f'' < 0 \quad \text{in } (-\infty, 0)$$

$$f'' > 0 \quad \text{in } (0, +\infty)$$

$$f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\})$$



$$5) \quad x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1) \Rightarrow \frac{1}{x^3-1} \stackrel{\text{le 28.11.1}}{=} \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

$$\text{Si on a } \begin{cases} A+B=0 \\ A-B+C=0 \\ A-C=1 \end{cases} \Rightarrow A = \frac{1}{3}, B = -\frac{1}{3}, C = -\frac{2}{3}$$

$$\int \frac{1}{x^3-1} dx = \frac{1}{3} \int \frac{1}{x-1} dx - \frac{1}{3} \int \frac{x+2}{x^2+x+1} dx$$

$$= \frac{1}{3} \log|x-1| - \frac{1}{6} \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+x+1}$$

$$= \frac{1}{3} \log|x-1| - \frac{1}{6} \log|x^2+x+1| - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

Il reste

$$1 + \cos(2x) = 1 + (\cos x)^2 - (\sin x)^2 = 2(\cos x)^2$$

$$\Rightarrow \frac{3^{\log x}}{1 + \cos(2x)} = \frac{1}{2} 3^{\log x} \frac{d(\log x)}{dx}$$

le 29.7.1

$$\Rightarrow \int \frac{3^{\log x}}{1 + \cos(2x)} dx = \frac{1}{2} \int 3^y dy \quad | y = \log x$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{3^y}{\log 3} + C \right] \Big|_{y=\log x} = \frac{3^{\log x}}{2 \log 3} + C$$