

Compito 23/9/19, Analisi Matematica 1

Nome (in stampatello):

Cognome (in stampatello):

Crediti:

facoltativo: posta elettronica in stampatello

Studente del corso di Calcolo (anche Calcolo 1, Calcolo 2):

Nota: non si possono consultare libri, appunti, macchine elettroniche di qualunque genere per inviare o ricevere informazioni, o per fare calcoli. Se uno studente si vuole ritirare, deve comunque consegnare il compito. CONSEGNARE SOLO I FOGLI SPILLATI.

1) Calcolare il

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{6x^3 e^{-\frac{7x}{6}} - \frac{3x}{1+x} + e^{-x} \sin(3x)}{(\arctg(x/2))^2 x^3}$$

Denominatore: $\sim x^3 \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^5}{4}$

Numeratore (fino all'ordine 5): $e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$

$\sin(3x) = 3x - \frac{9}{2}x^3 + \frac{243}{120}x^5 + o(x^5)$

$e^{-x} \sin(3x) = 3x - 3x^2 - 3x^3 + 5x^4 + \frac{x^5}{10} + o(x^5)$

$-\frac{3x}{1+x} = -3x \left(1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \frac{1}{2}o(x^4)\right)$
 $= -3x + 3x^2 - 3x^3 + 3x^4 - 3x^5 + o(x^5)$

$e^{-\frac{7x}{6}} = 1 - \frac{7}{6}x + \frac{49}{72}x^2 + o(x^2)$

$6x^3 e^{-\frac{7x}{6}} = 6x^3 - 7x^4 + \frac{49}{12}x^5 + o(x^5)$

Numeratore = $\frac{71}{60}x^5 + o(x^5)$ Risultato: $\frac{71}{60} \cdot 4 = \frac{71}{15}$

2) Dire (e dimostrare) per quali α numeri reali la seguente serie converge:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \left[\frac{1}{n^{\alpha+2} \log n} + \frac{e^{\alpha n}}{n^2} \right]$$

Converge $\Leftrightarrow$ convergono $\sum \frac{1}{n^{\alpha+2} \log n} < \sum \frac{e^{\alpha n}}{n^2}$

Considera $\sum \frac{e^{\alpha n}}{n^2}$: $\text{se } \alpha = 0$ converge

e converge $\text{se } \alpha < 0$ (criterio $\sqrt{\quad}$) e diverge $\text{se } \alpha > 0$

Dunque $\sum \frac{e^{\alpha n}}{n^2} < +\infty \Leftrightarrow \alpha \leq 0$

La seconda serie converge $\Leftrightarrow \alpha + 2 > 1$, cioè $\alpha > -1$

Risultato: $-1 < \alpha \leq 0$

3) Studiare la funzione

$$\frac{\sqrt{1-4x+x^2}}{x}$$

indicandone il campo di esistenza, i relativi limiti, i possibili asintoti, specificandone la monotonia, i massimi e minimi locali e assoluti e i loro valori. della funzione f .

$$\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus (\{0\} \cup (2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3})) , \quad f \in \mathcal{C}^\infty(\text{dom}(f))$$

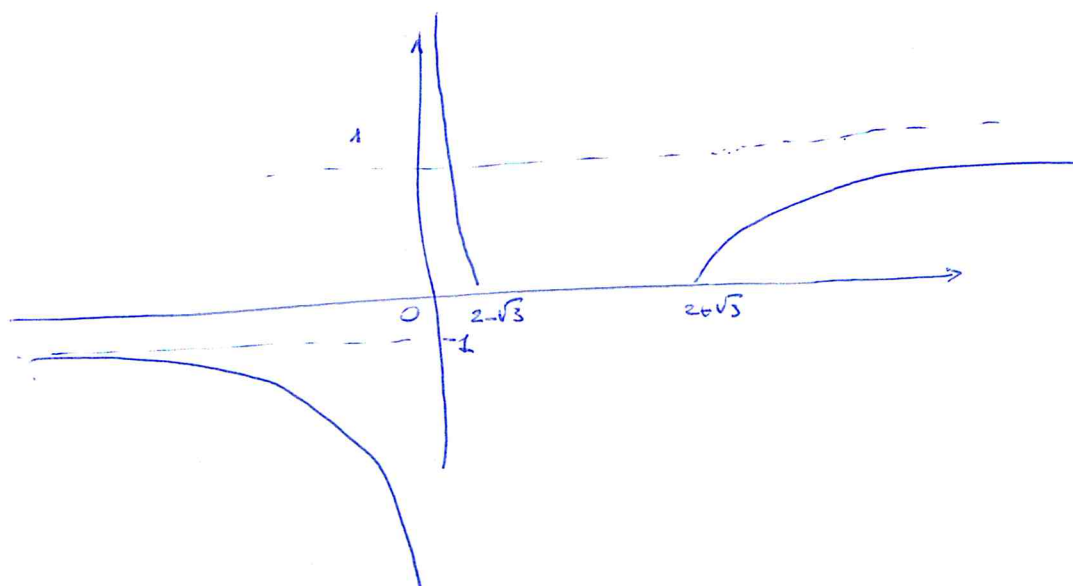
$$\text{Minimi rel: } 2 \pm \sqrt{3}$$

$$\text{Asintoti orizz: } y = -1 \quad \text{per } x \rightarrow -\infty$$

$$y = 1 \quad \text{per } x \rightarrow +\infty$$

$$\text{asintoto verticale } x = 0$$

$$f'(x) = \frac{2x-1}{x^2 \sqrt{x^2-4x+1}} , \quad \text{dom}(f') = \text{dom}(f)$$



4) Si calcoli il seguente integrale:

$$I = \int_0^{\pi/2} (\sin x)^3 \log((\cos x)^2 + 1) dx$$

$(\sin x)^3 = \sin x (1 - (\cos x)^2)$; ~~per~~ $\cos x = t$ si ha

$$I = - \int_1^0 (1-t^2) \log(1+t^2) dt = \int_0^1 (1-t^2) \log(1+t^2) dt$$

$$\uparrow \left[\left(t - \frac{t^3}{3} \right) \log(1+t^2) \right]_0^1 + \frac{2}{3} \int_0^1 \frac{t^4 - 3t^2}{t^2+1} dt$$

la parte

$$\frac{t^4 - 3t^2}{t^2+1} = t^2 - 4 + \frac{4}{t^2+1}$$

$$\Rightarrow \int \frac{t^4 - 3t^2}{t^2+1} dt = \frac{t^3}{3} - 4t + 4 \arctan t + C$$

$$I = \left[\left(t - \frac{t^3}{3} \right) \log(1+t^2) \right]_0^1 + \frac{2}{3} \left[\frac{t^3}{3} - 4t + \frac{8}{3} \arctan t \right]_0^1$$

$$= \frac{2}{3} \log^2 + \frac{2}{3} \pi - \frac{22}{9}$$

5) Si discuta la convergenza dell'integrale improprio:

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)}{(2+x^4)\log(1+x^{3/2})} dx$$

$f(x)$

vicino a 0

$$f(x) \sim \frac{\sqrt{x}}{\log(1+x^{3/2})} \sim \frac{\sqrt{x}}{x^{3/2}} = \frac{1}{x}$$

che dunque l'integrale diverge.