

Compito 16/7/19, Analisi Matematica 1

Nome (in stampatello):

Cognome (in stampatello):

Crediti:

facoltativo: posta elettronica in stampatello

Nota: non si possono consultare libri, appunti, macchine elettroniche di qualunque genere per inviare o ricevere informazioni, o per fare calcoli. Se uno studente si vuole ritirare, deve comunque consegnare il compito. CONSEGNARE SOLO I FOGLI SPILLATI.

1) Calcolare il

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2(x + \sin x)}{\lg(4x)} \right)^{\frac{1}{1 - \cos x}}$$

CALCOLO

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 - \cos x} \lg \left(\frac{2(x + \sin x)}{\lg(4x)} \right)$$

$$= 2 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} \lg \left(\frac{2(x + \sin x)}{\lg(4x)} \right) \stackrel{\text{De l'Hop}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \left(\frac{(1 + \cos x) \lg(4x) - 4(x + \sin x)}{(x + \sin x) (\lg(4x))^2} \right)$$

$$\stackrel{\text{lo risale}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \frac{(1 + \cos x) \lg(4x) - 4(x + \sin x) (1 + (\lg(4x))^2)}{(x + \sin x) \lg(4x), 4x}$$

$$\stackrel{\frac{\lg x}{x} \rightarrow 1}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1 + \cos x) (\lg(4x)) - 4(x + \sin x) (1 + (\lg(4x))^2)}{8x^3}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3), \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2), \quad \lg(4x) = 4x + \frac{64x^3}{3} + o(x^3)$$

Sostituendo:

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(2 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)) (4x + \frac{64x^3}{3} + o(x^3)) - 4(2x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)) (1 + 16x^2 + o(x^2))}{8x^3}$$

$$= -\frac{65}{6} \quad \text{risultato} \quad e^{-65/6}$$

2) Dire per quali $\beta \in \mathbb{R}$ la serie seguente converge:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\log(1+n)}{n^\beta (\log n)^{1+\beta}} - \frac{1}{n^\beta (\log n)^\beta} \right)$$

$$\frac{\log(n+1)}{n^\beta (\log n)^{1+\beta}} - \frac{1}{n^\beta (\log n)^\beta} = \frac{\log(n+1) - \log n}{n^\beta (\log n)^{1+\beta}}$$

$$= \frac{\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{n^\beta (\log(n))^{1+\beta}} \sim \frac{1}{n^{1+\beta}} \frac{1}{(\log n)^{1+\beta}}$$

la serie converge $\Leftrightarrow \beta > 0$

3) Studiare la funzione

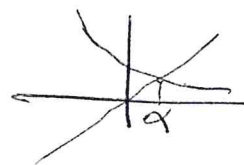
$$f(x) = \frac{e^{-x} + x}{|x - e^{-x}|}$$

indicandone il campo di esistenza, i relativi limiti, gli eventuali asintoti, specificandone i massimi e minimi locali e assoluti, studiando la derivata prima, e disegnandone il grafico.

$$\text{Dom}(f) = \{x - e^{-x} \neq 0\} = \{x \neq \alpha\} \quad \text{dove } \alpha$$

è l'unica radice di $x = e^{-x}$

$$f \in \mathcal{C}^\infty(\text{Dom}(f))$$



$\{y=1\}$ asintoto orizz. a $\pm \infty$

$\{x=\alpha\}$ asintoto verticale ; $\text{Dom}(f') = \text{Dom}(f) ; \forall x \neq \alpha$

$$f'(x) = \frac{1 - e^{-x}}{|x - e^{-x}|} + (e^{-x} + x) \frac{d}{dx} \frac{1}{|x - e^{-x}|}$$

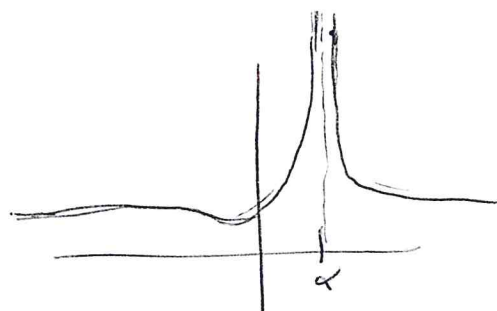
$$= \quad \quad \quad \frac{1}{|x - e^{-x}|^2} \frac{d}{dx} |x - e^{-x}|$$

$$= \quad \quad \quad \frac{x - e^{-x}}{|x - e^{-x}|} (1 + e^{-x})$$

$$= \frac{(1 - e^{-x})(x - e^{-x})^2 - (e^{-x} + x)(x - e^{-x})(1 + e^{-x})}{|x - e^{-x}|^3}$$

$$= \frac{2e^{-x}(x+1)}{|x - e^{-x}|(e^{-x} - x)} \quad 3$$

$x = -1$ min. assoluto



4) Si calcoli il seguente integrale improprio:

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^2+t} dt$$

$$\frac{1}{t^3+t} = \frac{1}{t} + \frac{-t}{1+t^2} \Rightarrow \int \frac{1}{t^3+t} dt = \log \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} + c$$

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^3+t} dt = \lim_{a \rightarrow +\infty} \left[\log \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \right]_2^a = \log \frac{\sqrt{5}}{2}$$

5) Trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'(x) = x(u(x))^2, \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

$$u(x) = \frac{2}{2-x^2}, \quad x \in (0, \sqrt{2})$$