

1)

$$\begin{aligned}
 & \frac{(n!)^{2n} \left[\left(7(n!)^{\frac{3}{n!}} \right) - 1 \right]}{\log((n!)^6) \left[(n!)^{2n-1} + n^2 \right]} \\
 &= \frac{(n!)^{2n} \left[\frac{e^{\frac{3}{n!} \log(7(n!))} - 1}{\log((n!)^6) (n!)^{2n-1} \left[1 + \frac{n^2}{(n!)^{2n-1}} \right]} \right]}{\log((n!)^6) (n!)^{2n-1} \left[1 + \frac{n^2}{(n!)^{2n-1}} \right]}
 \end{aligned}$$

Scriviamo la parentesi quadra al numeratore come

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \frac{e^{\frac{3}{n!} \log(7(n!))} - 1}{\frac{3}{n!} \log(7(n!))} \right\} \frac{3}{n!} \log(7(n!)) \\
 &= \left\{ \begin{array}{c} \text{...} \\ \text{...} \end{array} \right\} \frac{3}{n!} (\log 7 + \log(n!))
 \end{aligned}$$

La parentesi $\{ \dots \} \rightarrow 1$; $\frac{3 \log 7}{n!} \rightarrow 0$

La parentesi $[]$ al denominatore $\rightarrow 1$.

Il quoziente considerato ha dunque lo stesso andamento di:

$$\frac{(n!)^{2n} \frac{3}{n!} \log(n!)}{6 \log(n!) (n!)^{2n-1}}$$

$$= \frac{1}{2}$$

Il limite e^{-1} dunque $1/2$

2)

$$\frac{1}{1+2^{n^2}} \leq \frac{1}{2n^2}$$

dunque $\sum \frac{\pi}{1+2n^2} < +\infty$

Il comportamento della serie è dunque, essendo

$$\sum_n \frac{\pi + n \cos(n\pi)}{1+2n^2} = \pi \sum_n \frac{1}{1+2n^2} + \sum_n \frac{n \cos(n\pi)}{1+2n^2},$$

quella della serie

$$\sum_n \frac{n \cos(n\pi)}{1+2n^2} = \sum_n \frac{n (-1)^n}{1+2n^2}$$

$$= \sum_n (-1)^n a_n \quad \text{con } a_n = \frac{n}{2n^2+1} > 0$$

Abbiamo $a_n \rightarrow 0$

$$a_n \geq a_{n+1}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, dato che

$$\begin{aligned} \frac{n+1}{1+2(n+1)^2} &\leq \frac{n}{2n^2+1} \iff 2n^3 + 2n^2 + n + 1 \\ &\leq n [2(n+1)^2 + 1] \\ &= 2n^3 + 4n^2 + 3n \end{aligned}$$

$$\iff 2n^2 + 2n - 1 \geq 0 \quad \text{vero.}$$

Dal criterio di Leibnitz segue che la
serie converge.

Notiamo che la serie $\sum_n (-1)^n \frac{n}{2n^2+1}$ non
converge assolutamente.

3) è un limite « della forma $+\infty^0$ »

$$\text{Scriviamo } \left(\int_1^x e^{2s} \log s \, ds \right)^{\frac{\operatorname{arctg}(3x)}{2x}}$$

$$= e^{\frac{1}{2x} \operatorname{arctg}(3x) \log \left(\int_1^x e^{2s} \log s \, ds \right)}$$

Dobbiamo pertanto calcolare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x} \operatorname{arctg}(3x) \log \left(\int_1^x e^{2s} \log s \, ds \right)$$

$$= \frac{\pi}{4} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log \left(\int_1^x e^{2s} \log s \, ds \right)}{x}$$

Applichiamo il teorema de L'Hopital, calcolando

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\int_1^x (e^{2s} \log s) \, ds} \cdot e^{2x} \log x$$

Applichiamo ancora il te di de L'Hopital, calcolando

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(2 \log x + \frac{1}{x} \right) e^{2x}}{e^{2x} \log x} = 2$$

Il limite cercato è dunque $e^{\pi/2}$

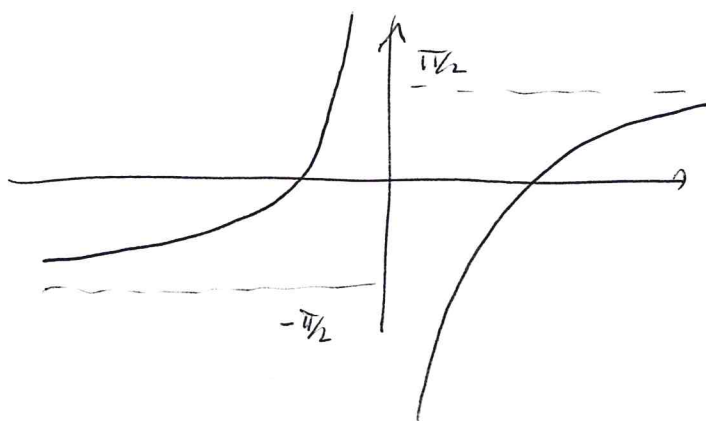
$$4) \quad \text{se } c < 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f_c(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_c(x) = \pi/2$$

$$f'_c(x) = \frac{(1-c)x^2 - c}{(1+x^2)x^2} > 0 \quad \forall x > 0$$

f_c concava in $\mathbb{R}^+$ poiché somma di due
funzioni anch'esse $\frac{c}{x}$ concave in $\mathbb{R}^+$



Sia ora $c > 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f_c(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_c(x) = \pi/2$$

$$f_c(x) > \arctan x \quad \forall x > 0$$

$$f'_c(x) = \frac{(1-c)x^2 - c}{(1+x^2)x^2}$$

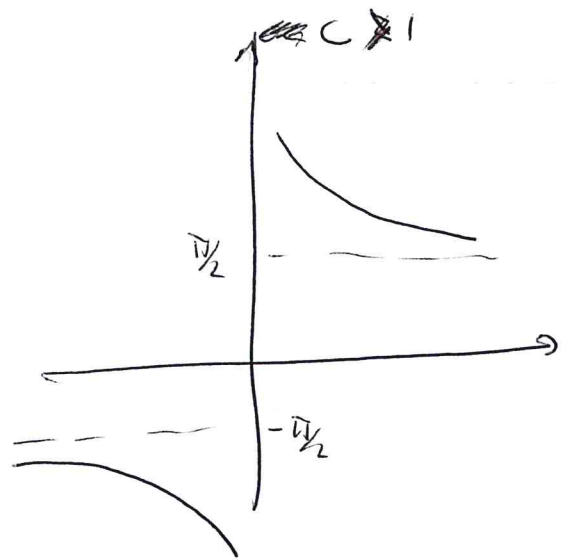
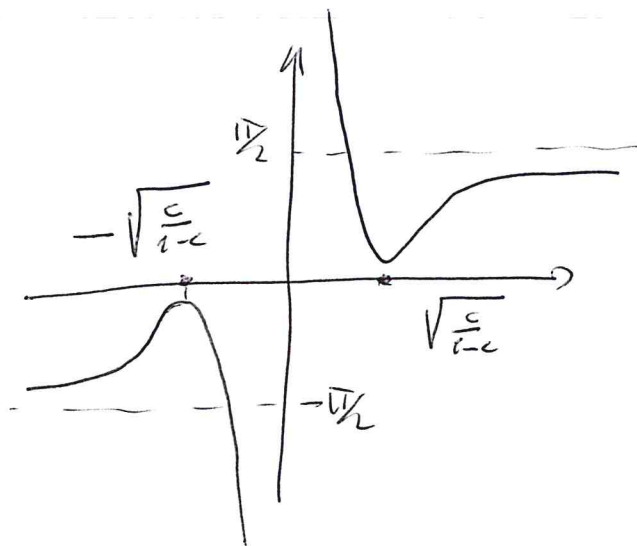
Quesiti

$$c \geq 1 \Rightarrow f'_c(x) < 0 \quad \forall x > 0$$

$$0 < c < 1 \Rightarrow f'_c(x) < 0 \quad \text{per } 0 < x < \sqrt{\frac{c}{1-c}}$$

$$f'_c\left(\sqrt{\frac{c}{1-c}}\right) = 0, \quad f'_c(x) > 0 \quad \text{per } x > \sqrt{\frac{c}{1-c}}$$

$0 < c < 1$



$$5) \quad \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{e^x (e^x - 1)}{e^{2x} - 1} dx = I$$

Poniamo $e^x = t$

$$I = \frac{1}{2} \int_e^{e^2} \frac{\cancel{t} - 1}{t^2 - 1} dt = \frac{1}{2} \int_e^{e^2} \frac{1}{1+t} dt$$

$$= \frac{1}{2} \log \left(\frac{e^2 + 1}{e + 1} \right)$$

$$\int_1^2 \frac{1}{x^3} \arctan \left(\frac{1}{x} \right) dx$$

Poniamo $t = \frac{1}{x}$

$$= \int_{1/2}^1 t \arctan t \, dt = \left[\frac{1}{2} t^2 \arctan t \right]_{1/2}^1 - \frac{1}{2} \int_{1/2}^1 \frac{t^2}{1+t^2} dt$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4} - \frac{5}{8} \arctan \left(\frac{1}{2} \right)$$