

1)
$$\frac{n^{n-2} + (n-2)^n}{4(n^n) - 3(n!)} = \frac{n^n \left(\frac{1}{n^2} + \left(\frac{n-2}{n} \right)^n \right)}{n^n \left(4 - 3 \frac{n!}{n^n} \right)}$$

$$= \frac{\frac{1}{n^2} + \left(\frac{n-2}{n} \right)^n}{4 - 3 \frac{n!}{n^n}}$$

Ricordiamo che $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$ (esercizio 10.11.1)

e che $\left(\frac{n-2}{n} \right)^n = \left(1 - \frac{2}{n} \right)^n \rightarrow e^{-2}$

Quindi il limite cercato è $\frac{1}{4e^2}$ (lezione 10 p. 104)

2) $1 \leq 2 + \sin n \leq 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ Serie a termini positivi

Quindi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{\sqrt[3]{n^5}} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)(2 + \sin n)}{\sqrt[3]{n^5}} \leq 3 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{\sqrt[3]{n^5}}$$

(vedi anche pag 2 lezione 7)

Applicando il criterio del confronto asintotico

Dato che $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n} = 1$ (che il carattere dello si ottiene serie è lo stesso del carattere V della serie)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{\sqrt[3]{n^5}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2/3}}$$

che diverge, poiché $\frac{2}{3} < 1$. La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{\sqrt[3]{n^5}}$ è dunque divergente.

$$3) \quad \frac{8x^2 \cos(2x) - 2 \log(1+4x^2)}{7x^2 \frac{\tan(x^4)}{x^4} \cdot x^4}$$

$$= \frac{8x^2 \cos(2x) - \frac{2}{4x^2} \log(1+4x^2) 4x^2}{7x^2 \frac{\tan(x^4)}{x^4} \cdot x^4}$$

$$= \frac{8 \left(\cos(2x) - \frac{\log(1+4x^2)}{4x^2} \right)}{7 \frac{\tan(x^4)}{x^4} \cdot x^4}$$

$$= \frac{8 \cdot 16 \left(\cos y - \frac{\log(1+y^2)}{y^2} \right)}{7 y^4}$$

serve qualche

strumento in più.

$$3) \quad \frac{1}{x} \left[\log\left(\frac{1}{1-x}\right) - \frac{\sin x}{x} e^x \right]$$

$$= \frac{1}{x} \log\left(\frac{1}{1-x}\right) - \frac{\sin x}{x} e^x \xrightarrow{x \rightarrow 1} 1$$

$$\frac{1}{1-x} = 1+y \Rightarrow x = \frac{y}{1+y}$$

$$\frac{1}{x} \log\left(\frac{1}{1-x}\right) = (1+y) \frac{\log(1+y)}{y} \xrightarrow{y \rightarrow 0} 1$$

Risultato finale $1-1=0$, Oppure
 $\log\left(\frac{1}{1}\right) = 0$

$$4) \quad a_n = \frac{1}{n}$$

5) Se (s_n) fosse di Cauchy, allora convergerebbe a un numero reale. Ma $s_n \rightarrow +\infty$.

$$\begin{aligned} \text{Sia } p \in \mathbb{N}; \quad |s_{n+p} - s_n| &= \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k} \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{n+1}{k} = \frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{n+1}{n+2} + \dots + \frac{n+1}{n+p} \right) \\ &\leq \frac{1}{n+1} (1 + 1 + \dots + 1) = \frac{p}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

$$6) \quad a_n = \frac{(-1)^n}{n}, \quad b_n = -\frac{2}{n}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad \frac{(n+1)^{2(n+1)}}{(2(n+1))!} n^{2n} &= \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} \underbrace{\left(\frac{n+1}{n} \right)^{2n}}_{\downarrow e^2} \\ &\quad \downarrow 1/4 \\ \frac{e^3}{4} > 1 &\Rightarrow \text{la serie diverge} \end{aligned}$$

$$\cos(\pi n) = (-1)^n. \quad \sum \left| 1 - n \sec \frac{1}{n} \right|^n$$

Criterio della radice $\sqrt[n]{|1 - n \sec \frac{1}{n}|} \rightarrow 0 < 1$
la serie converge assolutamente dunque converge.

Siamo in parte 2

7) Se $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1}$ converge, la successione $(-1)^{n+1}$ sarebbe in finitezza, assurdo. (teo 14.6.1)

8) $S_1 = 1, S_2 = 0, S_3 = 1, S_4 = 0$ ecc. Dunque

$$S_n = \begin{cases} \frac{n+1}{2n} & \text{se } n \text{ è dispari} = 2k+1 \\ \frac{1}{2} = \frac{k}{2k} & \text{se } n \text{ è pari} = 2k \end{cases}$$

Dunque $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1}{2}$

$$9) f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$$10) f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ -1 & \text{se } x \in [0,1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \end{cases}$$

f è discontinua in tutti i punti, (vedi pag 13 lezione 18)

ma $|f(x)| = 1 \quad \forall x \in [0,1]$, dunque

$|f|$ è continua in tutti i punti.

$$11) f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ -x & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

f è continua solo in $x=0$