

Sia (a_n) succ. di numeri reali,
defuiamo (cosa sempre possibile)

$$l^- = \liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n, \quad l^+ = \limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n.$$

Notiamo che

$$l^- \leq l^+$$

Infatti $\forall n \in \mathbb{N}$

$$b_n = \inf_{k > n} a_k \leq \sup_{k > n} a_k = c_n$$

E dunque

$$l^- = \sup_{n \in \mathbb{N}} b_n \leq \inf_{n \in \mathbb{N}} c_n = l^+$$

Supponiamo $l^-, l^+ \in \mathbb{R}$, cioè (9.1.1)

$$-\infty < l^- \leq l^+ < +\infty$$

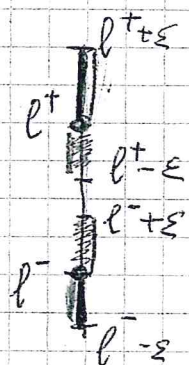
OSS 9.1.1 Sotto l'ipotesi (9.1.1) si ha:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad a_n < l^+ + \varepsilon \quad \text{def. in } n$$

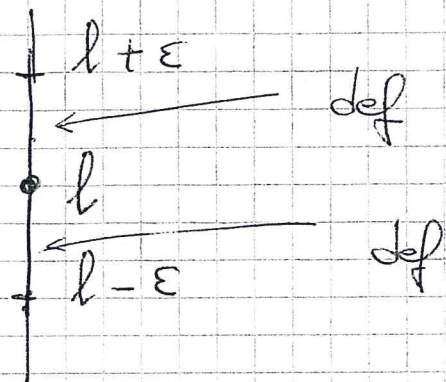
$$a_n > l^+ - \varepsilon \quad \text{freq. in } n$$

$$a_n > l^- - \varepsilon \quad \text{def. in } n$$

$$a_n < l^- + \varepsilon \quad \text{freq. in } n$$



Se in particolare $l^- = l^+ =: l$



si ottiene

$$\forall \varepsilon > 0 \quad l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon \quad \text{def. in } n$$



$$\forall \varepsilon > 0 \quad |a_n - l| < \varepsilon \quad \text{def. in } n$$



$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} = \bar{n}(\varepsilon) : |a_n - l| < \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}, n > \bar{n}$$

Def 9.2.1. Supponiamo che

$\exists l \in \mathbb{R}$ tale che

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} = \bar{n}(\varepsilon) : |a_n - l| < \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}, n > \bar{n}$$

Si dice in tal caso che (a_n) ammette limite (finito) e scriveremo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l.$$

« $\forall \varepsilon > 0 \quad a_n \in B_\varepsilon(l) \quad \text{def. in } n \gg$ »

||
palla centrata in l
aperta
di raggio ε , che

nel caso nostro, altro non è che
l'intervallo $(l - \varepsilon, l + \varepsilon)$.

• Dim di OSS 9.1.1:

Dimostriamo ad esempio la 1^a e la 2^a
(che riguardano l^+); la 3^a e la 4^a
si dimostrano in modo simile.

che riguardano l^-

• $\mathbb{R} \ni l^+ = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{k > n} a_k = \inf_{n \in \mathbb{N}} c_n$

dove $c_n := \sup_{k > n} a_k$, si ha

1) $l^+ \leq c_n \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

2) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} : c_n < l^+ + \varepsilon$

• Cioè, ricordando la def. di c_n ,

$$1) \quad l^+ \leq \sup_{k > n} a_k \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

$$2) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} : \sup_{k > n} a_k < l^+ + \varepsilon$$

Dalla 2) deduco, dato da $\sup_{k > n} a_k \geq a_k \quad \forall k \in \mathbb{N}, k > n$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad a_k < l^+ + \varepsilon \quad \forall k \in \mathbb{N}, k > n$$

Cioè

$$\forall \varepsilon > 0 \quad a_n < l^+ + \varepsilon \quad \text{def. in } n.$$

che è "meta" di quanto vogliamo dimostrare,

cioè è la prima affermazione della Oss. 9.1.1. Resta da dimostrare la seconda.

Per dedurre quest'ultima, devo usare la 1).

Poiché $C_n := \sup_{k > n} a_k$, abbiamo dato $\sup_{k > n} a_k$ (un qualunque).

$$.) \quad C_n \geq a_k \quad \forall k \in \mathbb{N}, k > n$$

$$..) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N}, k > n : a_k > C_n - \varepsilon$$

Mi interessa della ..)

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N}, k > n : a_k > C_n - \varepsilon \geq l^+ - \varepsilon$$

Si conclude che

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists k \in \mathbb{N}, k > n$$

$$a_k > l^+ - \varepsilon$$

che è come dire

$$\forall \varepsilon > 0 \quad a_n > l^+ - \varepsilon \quad \text{freq. in } n$$

che conclude la dim. $\square$

Cosa manca: in certi casi può capitare

$$l^- = -\infty, \quad l^+ = +\infty$$

ES $a_n = (-1)^n n$

$$l^- = -\infty, \quad l^+ = +\infty$$

Nota se $a_n = n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ si ha

$$l^- = l^+ = +\infty$$

$$\begin{aligned} l^+ &= \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{k > n} a_k = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{k > n} k \\ &= \inf_{n \in \mathbb{N}} +\infty = +\infty \end{aligned}$$

$$l^- = \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{k > n} q_k$$

$$= \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{k > n} k$$

$$= \sup_{n \in \mathbb{N}} (n+1) = +\infty.$$

Può capitare anche $l^- = l^+ = -\infty$

" " " $l^- = -\infty < l^+ \in \mathbb{R}$

" " " $-\infty < l^- < l^+ = +\infty$.

Def 9.6.1. Sia (a_n) una succ. di numeri reali. Scriviamo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$$

Se $\forall \pi \in \mathbb{R} \quad \exists \bar{n} = \bar{n}(\pi) \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}$
 $n > \bar{n}, \quad a_n > \pi.$

Note : $a_n > \pi \iff a_n \in (\pi, +\infty)$

« Fissato un qualunque intorno di $+\infty$, definitivamente in n , a_n cade in quell'intorno ».

Def. 9.7.1 Sia (a_n) una succ. di numeri reali. Diciamo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$$

se $\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists \bar{n} = \bar{n}(M);$

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n > \bar{n}$ si ha $a_n < M$

(cioè $a_n \in (-\infty, M)$).

Teo 9.7.0 il limite di (a_n) , se esiste, è unico (per ora).

Nota $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty \iff l^- = l^+ = +\infty$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty \iff l^- = l^+ = -\infty.$

Teo 9.7.1 Sia (a_n) una succ. di numeri reali. (a_n) converge a un limite finito $\iff l^- = l^+ \in \mathbb{R}$.

(a_n) tende a $+\infty \iff l^- = +\infty$

(a_n) tende a $-\infty \iff l^+ = -\infty.$

ES 9.7.1 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$

Prima di fare questo esercizio osservo

che il teo 7.4.1 si può scrivere così:

Teo: Sia (a_n) succ. reale con $a_n \geq 0$

$\forall n \in \mathbb{N}$. Se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty$

allora $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$

(si dice che (a_n) è infinitesima).

Ad esempio, se $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \in (0, +\infty]$

allora $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty$

Nota: se $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$

Non è detto che $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty$.

Ad esempio: $a_n = \frac{1}{n}$

Svolgiamo l'esercizio 9.7.1. Vado a vedere se la Def 9.2.1 è verificata con $l=0$.

? $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} = \bar{n}(\varepsilon) : \forall n \in \mathbb{N}, n > \bar{n}$

$$-\varepsilon < a_n < \varepsilon$$

↑
vera $\forall n \in \mathbb{N}$, perché $a_n = \frac{1}{n} > 0$

$$? \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} = \bar{n}(\varepsilon) : \forall n \in \mathbb{N} \quad n > \bar{n} \\ \frac{1}{n} < \varepsilon$$

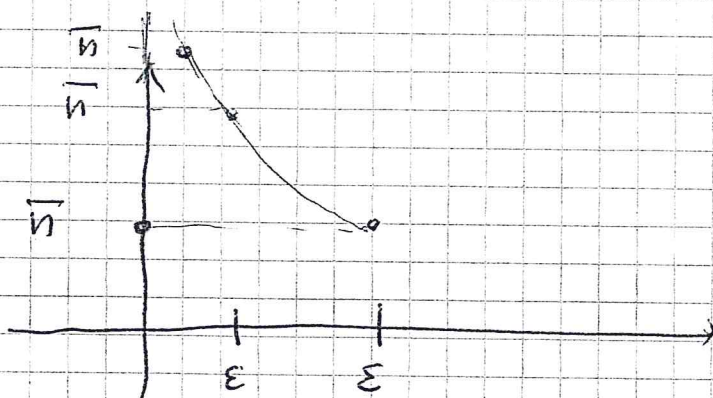
$$\frac{1}{n} < \varepsilon \iff \frac{1}{\varepsilon} < n$$

basta scegliere $\bar{n}(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right] + 1$

Infatti $\forall n \in \mathbb{N} \quad n > \bar{n}(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right] + 1$

ho anche $n > \frac{1}{\varepsilon}$

Nota: con questa scelta di $\bar{n}$, la funzione $\varepsilon \rightarrow \bar{n}(\varepsilon)$ è decrescente



$$\underline{\text{Es}} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-n^2 + \frac{1}{2}}{n} = -\infty$$

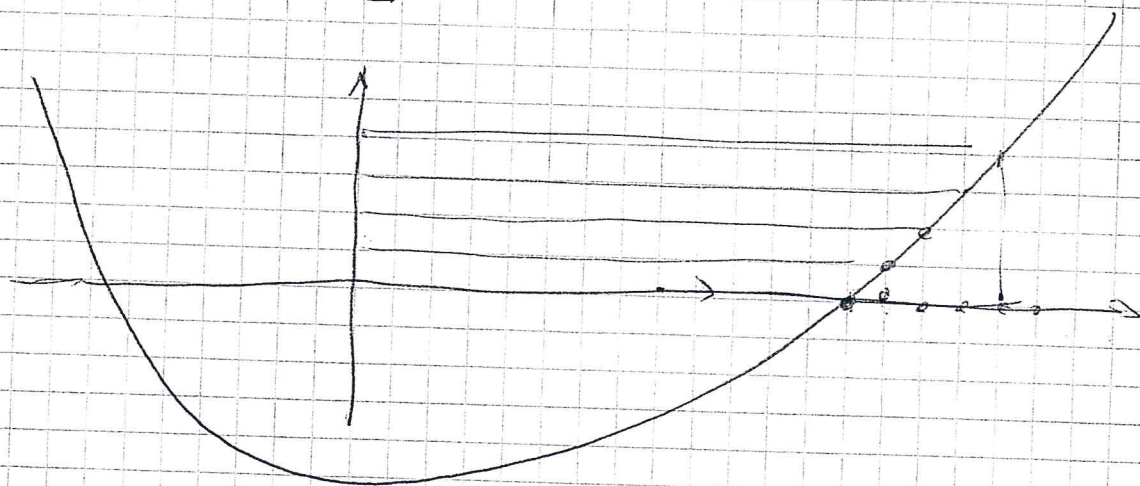
Usiamo la def. 9.7.1:

$\forall M \in \mathbb{R}$ (basta $M < 0$) $\exists \bar{n} = \bar{n}(M) \in \mathbb{N}$:

$\forall n \in \mathbb{N}, n > \bar{n} \implies a_n < M$
 $a_n = \frac{-n^2 + \frac{1}{2}}{n}$

$$? \quad \forall M < 0 \quad \exists \bar{n} = \bar{n}(M) : \forall n \in \mathbb{N}, n > \bar{n}$$

$$n^2 + nM - \frac{1}{2} > 0$$



$$\bar{n} := \left\lceil \frac{-M + \sqrt{M^2 + 2}}{2} \right\rceil \quad \text{va bene}$$

Esercizio 9.10.1.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e \quad (9.10.1)$$

Consiste in 2 parti: dimostrare che

$$\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$$

e poi vedere che $e = e$.

Tra l'altro, la (9.10.1) può diventare la definizione di e .

Teo 9.11.1

11

Se (a_n) successione di numeri real.
e' monotona, ammette sempre limiti
(finito o infinito). Più precisamente,

se (a_n) e' crescente allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \sup \{ a_n : n \in \mathbb{N} \}$$

Lo stesso se (a_n) e' strett. crescente.

Se (a_n) e' decrescente, allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \inf \{ a_n : n \in \mathbb{N} \}$$

(e lo stesso se e' strett. decrescente)

Dim. Supponiamo che (a_n) sia crescente
(gli altri casi hanno una dim. simile)

Cominciamo con supporre che (a_n) e'
superiormente limitata: cioe'

$$s := \sup \{ a_n : n \in \mathbb{N} \} < +\infty.$$

Dalla def. di estremo sup. si ha:

$$1) \quad S \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$2) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N}: \quad a_n > S - \varepsilon$$

Dalla 2) + la monotonia di (a_n) deduce

$$2') \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N}: \quad a_m > S - \varepsilon \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad m \geq n$$

D'altra parte da 1) segue anch

$$1') \quad \forall \varepsilon > 0 \quad a_n < S + \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Dalla 2') e 1') segue

$$\forall \varepsilon > 0 \quad S - \varepsilon < a_n < S + \varepsilon \quad \text{def. in } n$$

Quindi S verifica la Def 9.2.1.

Perciò il limite è unico (teo 9.7.0)

$$\Rightarrow S = \text{limite di } (a_n).$$

La dim. nel caso in cui (a_n) non

è inferiormente limitata, cioè $\sup \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$

$= +\infty$ per caso

□