

Teo 8.1.1 Sia (a_n) una successione di numeri ≥ 0 , e supponiamo che (a_n) sia decrescente. Allora

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty \iff \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n a_n}{2^n} < +\infty. \quad (8.1.1)$$

Dim. Una idea simile a quella della pag. 1 lezione 6; ^{anche in quel caso} (a_n) era decrescente. Indichiamo con $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$

$$S_{2^{k+1}} = a_1 + a_2 + \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=2^k+1}^{2^{k+1}} a_j \right)$$

Membero destro: $n=3$

$$\begin{aligned} & a_1 + a_2 + \sum_{k=1}^3 \sum_{j=2^k+1}^{2^{k+1}} a_j = \\ & = a_1 + a_2 + \sum_{j=3}^4 a_j + \sum_{j=5}^8 a_j + \sum_{j=9}^{16} a_j \\ & = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \dots + a_8 + a_9 + \dots + a_{16} \end{aligned}$$

8

$$S_{2^{n+1}} = a_1 + a_2 + \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=2^k+1}^{2^{k+1}} a_j \right) \quad (8.2.1)$$

Adesso uso la decrescenza di (a_n) :

cioè $a_{l+1} \leq a_l \quad \forall l \in \mathbb{N}$. Si ha

$$\sum_{j=2^k+1}^{2^{k+1}} a_{2^{k+1}} \leq \sum_{j=2^k+1}^{2^{k+1}} a_j \leq \sum_{j=2^k+1}^{2^{k+1}} a_{2^k+1}$$

||

$$2^k a_{2^{k+1}}$$

||

$$2^k a_{2^k+1}$$

Sostituendo nella (8.2.1) ottengo

$$a_1 + a_2 + \sum_{k=1}^n 2^k a_{2^{k+1}} \leq S_{2^{n+1}} \leq a_1 + a_2 + \sum_{k=1}^n 2^k a_{2^k+1}$$

Le somme parziali nella serie a destra nella (8.1.1.) sono

$$C_n = \sum_{k=1}^n 2^k a_{2^k}$$

ES 8.3.1 Dimostrare che $e \notin \mathbb{Q}$

Mentre era facile dimostrare che $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, questo è più difficile.

2)

Ricordiamo

$$e := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$$

Dobbiamo dim. che $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \notin \mathbb{Q}$

Fissiamo $n \in \mathbb{N}$; $e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} =$

$$= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \quad \text{« coda » della serie}$$

$$\text{Dico che } \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} < \frac{1}{(n+1)!} \frac{(n+2)}{(n+1)} \quad (8.3.1)$$

Dimostriamo la (8.3.1):

4

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \frac{(n+1)!}{(n+1)!} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} \cdot (n+1)! \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$$

Se dimostriamo che $(n+1)! \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} < \frac{n+2}{n+1}$,
 ho concluso la (8.3.1).

$$(n+1)! \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(n+1)!}{k!}$$

$$= 1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+3)(n+2)} + \dots$$

$$< 1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+2)} + \frac{1}{(n+2)^3} + \dots$$

$$= \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)^j} = \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+2} \right)^j$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{1}{n+2}} = \frac{n+2}{n+1}$$

Abbiamo dunque dimostrato la (8.31),⁵

Che

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad e - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} < \frac{1}{(n+1)!} \frac{n+2}{n+1} \quad (8.51)$$

Supponiamo ora per assurdo che $e \in \mathbb{Q}$

Dunque $e = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}$;

La (8.5.1) è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

In particolare è vera per $n=q$. Dunque

$$0 < e - \sum_{k=0}^q \frac{1}{k!} < \frac{1}{(q+1)!} \frac{q+2}{q+1} \quad (8.5.2)$$

Moltiplichiamo tutto per $(q+1)!$

$$0 < (q+1)! \left(e - \sum_{k=0}^q \frac{1}{k!} \right) < \frac{q+2}{q+1}$$

Nota che $(q+1)! e = (q+1)! \frac{p}{q} \in \mathbb{N}$

$(q+1)! \sum_{k=0}^q \frac{1}{k!} \in \mathbb{N}$. Infatti

$$(q+1)! \sum_{k=0}^q \frac{1}{k!} = (q+1)! \left(1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{q!} \right)$$

Dalla (8.5.2), poiché $\frac{1}{(q+1)!} \frac{q+2}{q+1} < \frac{1}{q!} \frac{1}{q}$, segue

$$0 < e - \sum_{k=0}^q \frac{1}{k!} < \frac{1}{q!} \frac{1}{q} \quad (8.5.3)$$

Moltiplichiamo la (8.5.3) per $q!$,
e otteniamo

$$0 < q! \left(e - \sum_{k=0}^q \frac{1}{k!} \right) < \frac{1}{q} \quad (8.6.1)$$

Osservo

$$q!e = q! \frac{p}{q} \in \mathbb{N}$$

$$q! \sum_{k=0}^q \frac{1}{k!} = q! \left(1 + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{q!} \right) \in \mathbb{N}$$

Dunque

$$q! \left(e - \sum_{k=0}^q \frac{1}{k!} \right) \in \mathbb{N},$$

questo contraddice la (8.6.1).

□

Le proprietà di $\mathbb{R}$, in particolare l'assioma
dell'elemento separatore, permettono di
dimostrare che se $E \subseteq \mathbb{R}$, $E \neq \emptyset$
allora $\exists \inf E$, $\sup E$ ben definiti.

Da $\sup E$ abbiamo fatto tutta la
teoria di $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$, $a_k \geq 0$.

Ci servirà la nozione di limite di 7

- una successione per definizione, ad esempio,
 $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ con a_k non necessariamente ≥ 0

Vediamo però che la nozione di limite si ottiene direttamente dalle nozioni di estremo inferiore e superiore, "annidandoli" opportunamente.

Ricordiamo: una successione ^{(di numeri reali (risp. $\mathbb{C}$))} è

una funzione $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$.

(risp. $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$).

Indichiamo $f(n) = a_n, o b_n, o c_n, \dots$

- (a_n) si dice crescente se $a_n \leq a_{n+1}$ ecc.

Def 8.7.1 Sia (a_n) una successione di numeri reali. Poniamo

$$l^- := \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{k > n} a_k$$

$$l^+ := \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{k > n} a_k$$

oss 8.7.1 l^-, l^+ sono sempre ben definiti.

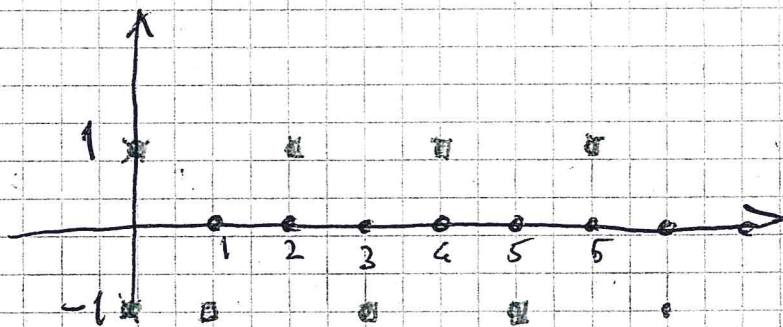
l^- si chiama minimo limite di (a_n)
e si scrive spesso

$$l^- = \liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = \liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n$$

l^+ si chiama massimo limite di (a_n) ,
e si scrive spesso

$$l^+ = \limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n$$

Es 8.8.1 $a_n = (-1)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$



$\bullet \bullet \bullet = \text{dom}(f) = \mathbb{N}$

$\blacksquare \blacksquare \blacksquare \blacksquare = \text{graph}(f) = \{(n, f(n)) : n \in \mathbb{N}\}$

$\times \times = \text{im}(f) = \{\pm 1\}$

$$f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(n) = (-1)^n$$

Voglio calcolare $\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n$, $\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n$

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{k > n} a_k$$

Devo prima fissare $n \in \mathbb{N}$, calcolare

$$\inf_{k > n} a_k, \text{ e poi fare il } \sup_{n \in \mathbb{N}}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \inf_{k > n} a_k = -1$$

$$\Rightarrow \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{k > n} a_k = -1$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sup_{k > n} a_k = 1$$

$$\Rightarrow \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{k > n} a_k = 1$$

$$l^- = -1, \quad l^+ = 1$$

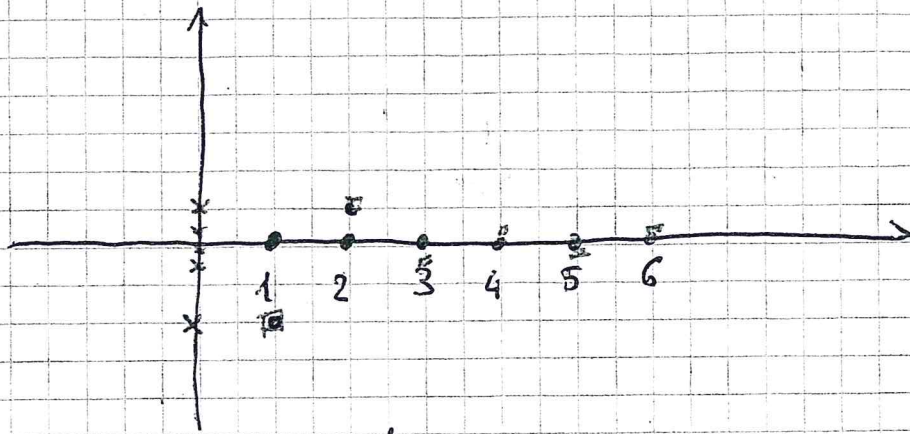
oss 8.9.1

$$l^- \neq l^+$$

$$(\text{anzi } l^- < l^+)$$

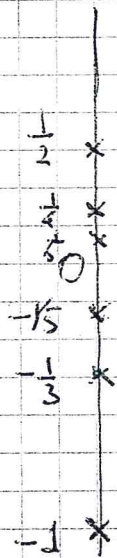
ES 8.9.1.

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n}$$



$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{k > n} \frac{(-1)^k}{k}$$

Fissato $n \in \mathbb{N}$, calcolo $\inf_{k > n} \frac{(-1)^k}{k}$



se n è pari

$$\inf_{k > n} \frac{(-1)^k}{k} = \frac{-1}{n+1}$$

$$\Rightarrow \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{k > n} \frac{(-1)^k}{k} = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \begin{array}{l} \frac{-1}{n+1} \quad n \text{ pari} \\ \frac{-1}{n+2} \quad n \text{ dispari} \end{array} \right\} = 0$$

se n è dispari

$$\inf_{k > n} \frac{(-1)^k}{k} = \frac{-1}{n+2}$$

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{k > n} a_k = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{k > n} \frac{(-1)^k}{k} \quad !!$$

Fissato n ,

$$\sup_{k > n} \frac{(-1)^k}{k} = \begin{cases} \frac{1}{n+2} & n \text{ pari} \\ \frac{1}{n+1} & n \text{ dispari} \end{cases}$$

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{k > n} \frac{(-1)^k}{k} = \inf_{n \in \mathbb{N}} \begin{cases} \frac{1}{n+2} & n \text{ pari} \\ \frac{1}{n+1} & n \text{ dispari} \end{cases} = 0$$

Oltrepò $l^- = l^+ = 0 \quad !!$

OSS 8.11.1 Chiamiamo

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad b_n := \inf_{k > n} a_k, \quad c_n := \sup_{k > n} a_k$$

Dico che la successione

(b_n) è crescente

(c_n) è decrescente

(notiamo $l^- = \sup_{n \in \mathbb{N}} b_n$, $l^+ = \inf_{n \in \mathbb{N}} c_n$)

In fatti $\boxed{\{k : k > n\} \supseteq \{k : k > n+1\}}$

e dunque $l' \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{k > n} a_k \leq \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{k > n+1} a_k$
e $\sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{k > n} a_k \geq \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{k > n+1} a_k$

12

« l'inf su una famiglia più grande
 può diminuire ma non aumentare;
 il sup su una famiglia più grande
 può aumentare ma non diminuire »

Tornando all'esercizio 8.8.1

domanda:

$\forall \varepsilon > 0$

$$a_n < l^+ + \varepsilon$$

def in n SI

$$a_n < l^+ + \varepsilon$$

freq. in n SI

$$a_n > l^+ - \varepsilon$$

def. in n NO

$$a_n > l^+ - \varepsilon$$

freq. in n SI

$$a_n < l^- + \varepsilon$$

def. in n NO

$$a_n < l^- + \varepsilon$$

freq. in n SI

$$a_n > l^- - \varepsilon$$

def. in n SI

$$a_n > l^- - \varepsilon$$

freq. in n SI

