

Lezione 7

15/10/18

11-13

1

Oss. sul teo 6.7.1: $q=1$ non è incluso nell'enunciato. Esempio se $a_n = \frac{1}{n}$,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Ma non è vero che

$$\exists q \in [0, 1): \frac{n}{n+1} \leq q \quad \text{def in } n.$$

$$\frac{n}{n+1} = \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad 1$$

Infatti per dim. che $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$

non possiamo usare teo 6.7.1

Ma abbiamo usato il trucco «del 2ⁿ»

(vedi lezione 6 pag 1).

Dim. (teo 6.7.1). Sia $q \in [0, 1)$ l'ipotesi è:

$$\exists N \in \mathbb{N}: \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq N$$

$$\text{cioè } a_{n+1} \leq q a_n \quad \forall n \geq N$$

$$\text{Se } n > N \quad a_n \leq q a_{n-1}$$

e via di seguito:

$$a_{n+1} \leq a_n q \leq a_{n-1} q^2$$

Esempio: se $N = 10$

$$a_{20} \leq q a_{19} \leq q^2 a_{18} \leq q^3 a_{17} \leq \dots \leq q^{10} a_{10}$$

$$a_n \leq q^{n-N} a_N \quad \forall n \geq N$$

$$\sum_{n=N}^{+\infty} a_n \leq \sum_{n=N}^{+\infty} q^{n-N} a_N \quad (7.2.1)$$

$$= a_N \sum_{n=N}^{+\infty} q^{n-N}$$

$$= a_N \sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{a_N}{1-q} < +\infty$$

$$\Rightarrow \sum_{n=N}^{+\infty} a_n < +\infty.$$

Poiché il carattere di una serie non si altera se ne modifica un numero finito di addendi, ne deduco

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty.$$

Per quanto riguarda la seconda parte³
 della dim., supponiamo $q > 1$,

$$\exists N \in \mathbb{N} : \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq q \quad \forall n \geq N, n \in \mathbb{N}$$

Ragionando come prima:

$$a_{n+1} \geq q a_n \geq q^2 a_{n-1} \dots \text{ e via di seguito}$$

$$a_n \geq q^{n-N} a_N \quad \forall n \geq N$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{n=N}^{+\infty} a_n \geq a_N \sum_{n=N}^{+\infty} q^{n-N} = a_N \sum_{n=N}^{+\infty} 1 = +\infty$$

$$\Rightarrow \sum_{n=N}^{+\infty} a_n = +\infty$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty.$$

□

Dim (teo 6.8.1) : Sia $q \in [0, 1)$; l'ipotesi è

$$\exists N \in \mathbb{N} : \sqrt[n]{a_n} \leq q \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N$$

$$a_n \leq q^n \quad \forall n \geq N$$

Si procede in modo simile alla (7.2.1).
 Anche per seconda parte dell' enunciato si

dimostrare in modo simile. $\square$

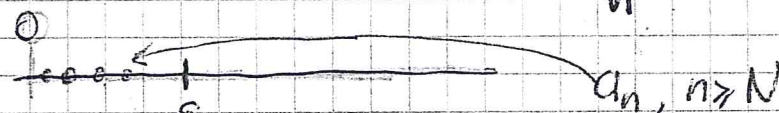
Un altro risultato utile, che va letto
« al contrario »:

Teo 7.4.1 Sia $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Se
$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty \quad (7.4.1)$$

allora $N(\varepsilon)$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} : a_n < \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N$



(cioè, $\forall \varepsilon > 0, a_n < \varepsilon$ definitivamente
in n . Quando faremo i limiti
di successioni, si dovrà che (a_n) è
infinitesima o che tende a zero)

Letture al contrario: Se

$\exists \varepsilon > 0 : \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq N : a_n \geq \varepsilon$

allora

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty$$

Esempio 7.4.1

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n+10} = +\infty$$

Premiamo $\varepsilon = \frac{1}{2}$, fissiamo $N \in \mathbb{N}$:

dico che $\exists n \in \mathbb{N}$, $n \geq N$:

$$\frac{n}{n+10} \geq \frac{1}{2}$$

Equivalentemente

$$2n \geq n+10, \text{ cioè}$$

$$n \geq 10$$

basta scegliere

$$n \geq N, \text{ e } n \geq 10$$

Dm (teo 7.4.1). Sia $S = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$

Per ipotesi (7.4.1) ho

$$S < +\infty$$

Sia $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ somma parziale
n-esima.

$$0 \leq a_n = S_n - S_{n-1} \leq S - S_{n-1}$$

Ricordando che $S = \sup \{S_n : n \in \mathbb{N}\}$,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} : S_N > S - \varepsilon$$

$$S - S_N < \varepsilon$$

Per monotonia

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} : S - S_n < \varepsilon \quad \forall n \geq N$$

(vedi lezione 6 formula 'centrale' di pag 6). Ne deduco

$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : a_n < \varepsilon \quad \forall n > N$,
che è la tesi del teorema.

□

Es. 7.6.1

Sia

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & n \text{ pari} \\ \frac{3}{2^n} & n \text{ dispari.} \end{cases}$$

Studiare il carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$

$\forall n \in \mathbb{N}$

$$a_n \leq \frac{3}{2^n}$$

$\Downarrow$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{2^n} = 3 \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$= 3$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \underset{\substack{\uparrow \\ n \text{ pari}}}{=} 3$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \underset{\substack{\uparrow \\ n \text{ dispari}}}{=} \frac{1}{3}$$

Dunque il criterio del rapporto non è applicabile, perciò il quoziente $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ oscilla $\frac{1}{3}, 3, \frac{1}{3}, 3, \dots$ e

Dunque non può mai essere minore o uguale di un numero < 1 definitivamente in n , (Non è nemmeno vero che è maggiore o uguale di un numero maggiore di 1 definitivamente in n).

$$\sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} \frac{1}{2} & n \text{ pari} \\ \frac{\sqrt[n]{3}}{2} & n \text{ dispari} \end{cases}$$

Il criterio delle radici si potrà applicare: per caso.

ES 7.7.1 (molto difficile, è un teorema infatti; vedi pag 542-543

[A.B]) CRITERIO DI CONDENSATIONE DI CAUCHY. Generalizza quanto fatto su $\sum 1 - 1/n$, vedi esercizi 6.1.1

Sia $a_n \geq 0$, e supponiamo che (a_n) sia decrescente. Allora

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty$$



(7.8.1)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n a_{2^n} < +\infty$$

Applicazione: Studiamo $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$

con $\alpha \geq 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$

(Se $\alpha < 1$ $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = +\infty$)

↑
confronto con $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$

Supponiamo (7.8.1) vera:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n \frac{1}{2^{n\alpha}} = \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{n(1-\alpha)}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} (2^{1-\alpha})^n$$

converge se e solo
se $2^{1-\alpha} < 1$, cioè $\alpha > 1$.