

Es 6.1.1 $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = +\infty$ SERIE ARMONICA (6.1.1)

(Mentre $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} < +\infty$)

Si vedrà che $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} < +\infty$ se $\alpha > 1$

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n}$$

Uso, per provare la (6.1.1), il test del confronto (Teo 5.11.1)

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\forall h \geq 1 : 2^h < J \leq 2^{h+1}$$

$$\frac{1}{J} \geq \frac{1}{2^{h+1}}$$

$$S_8 > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$S_{16} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$S_{2^{h+1}} > 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2}$$

sono 2^h indici
e $\frac{2^h}{2^{h+1}} = \frac{1}{2}$

Dal confronto deduco

2

$$\sup \{ S_n : n \in \mathbb{N} \} = +\infty$$

Perché

$$\sup \{ S_n : n \in \mathbb{N} \} \geq \sup \left\{ \frac{3}{2} + \frac{n}{2} : n \in \mathbb{N} \right\} = +\infty.$$

ES 6.2.1

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} < +\infty$$

$\cap$

$$(0, +\infty)$$

Def 6.2.1

$$e := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$$

Confronto: $k! \geq 2^{k-1} \quad \forall k \geq 1$ (6.2.1)
(vedi lezione 2)

$$\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}} \quad \forall k \geq 1$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \leq 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

$$= 1 + \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3$$

$\Rightarrow$ Non solo

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} < +\infty, \quad \text{MA}$$

$$e \leq 3 \quad (\text{anti } e < 3)$$

$$e := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} > 2.$$

Dunque

$$e \in (2, 3) \quad (6.3.1)$$

Per migliorare la (6.3.1), basterà
migliorare (6.2.1)

$$k! \geq 2^k \quad \forall k \geq 4 \quad (6.3.1)$$

(per induzione su k ; usare l'1.5.2)

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \sum_{k=4}^{+\infty} \frac{1}{k!}$$

$$= \frac{8}{3} + \sum_{k=4}^{+\infty} \frac{1}{k!}$$

$$\leq \frac{8}{3} + \sum_{k=4}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$= \frac{8}{3} + \sum_{k=4}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-4+4}$$

$$= \frac{8}{3} + \frac{1}{16} \cdot \sum_{k=4}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-4} = \frac{8}{3} + \frac{1}{16} \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$= \frac{8}{3} + \frac{1}{16} \cdot 2 = \frac{8}{3} + \frac{1}{8} = \frac{67}{24}$$

Dimunque $e \in (2, \frac{67}{24}]$

(anzi si vede subito $e \in (2, \frac{67}{24})$)

$$e = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} > 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{8}{3},$$

dimunque $e \in (\frac{8}{3}, \frac{67}{24})$

ES 6.4.1. Dimostrare che

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^k} < +\infty$$

OSS 6.4.1. Supponiamo (a_n)

successione reale ≥ 0 , $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$
a termini

e sappiamo

$$S := \sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty$$

Allora:



1) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} = \bar{n}(\varepsilon) \in \mathbb{N}:$

$$S_n > S - \varepsilon \quad \forall n \geq \bar{n}$$

2) $S_n \leq S \quad \forall n \in \mathbb{N}$; in particolare
 $\forall \varepsilon > 0 \quad S_n > S + \varepsilon \quad \nexists n \in \mathbb{N}$

in particolare (versione "meno interessante")

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{N} = \bar{N}(\varepsilon): S_n < S + \varepsilon$$

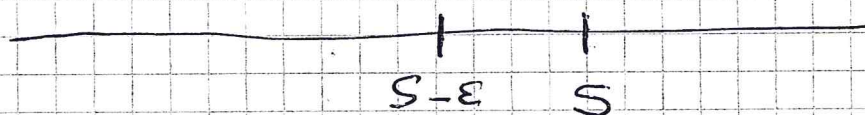
$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq \bar{N}$$

Dunque:

1) $\bar{e}$ vera definitivamente in n ,
una volta finito ε

2) $\bar{e}$ vera $\forall n$. In particolare
 $\bar{e}$ vera $\forall n$ se considero $\varepsilon > 0$.

In particolare $\bar{e}$ vera definitivamente
in n se considero $\varepsilon > 0$.



$$S = \sup \{ S_n : n \in \mathbb{N} \}$$

i) $S \geq S_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$; è la 2)

ii) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N}: S_n > S - \varepsilon$

La ii) $\nRightarrow$ i); evidentemente i) $\Rightarrow$ ii)

Come è possibile allora che valga i)?

Perché (S_n) è monotona crescente:

ii) + (S_n) monotona crescente



1)

In fatti: $\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} : S_n > S - \varepsilon$

Ma la monotonia $\Rightarrow S_m \geq S_n \quad \forall m \geq n$

Dunque

$$S_m > S - \varepsilon \quad \forall m \geq n.$$

In definitiva

$\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} : \forall m \in \mathbb{N},$

$m \geq n$ si ha $S_m > S - \varepsilon,$

che è la 1)

« la 1) e la 2) versione meno interessante sono la def. di limite, che è necessaria per $\sum a_n$, con a_n non necessariamente $\geq 0 \Rightarrow$

Ulteriori utili conseguenze del
teo di confronto.

Teo 6.7.1 (criterio del rapporto).

Sia (a_n) succ. di numeri reali > 0 .

Supponiamo

$$\exists q \in [0, 1) : \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q \text{ def. in } n.$$

Allora

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty$$

Se invece

$$\exists q \in (1, +\infty) : \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq q \text{ def. in } n$$

Allora

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty.$$

Note $q = 1$ Non è incluso nell'enun-
ciato.

Teo 6.8.1 (criterio della radice) 8

Sia (a_n) una succ. di numeri reali ≥ 0 .

Supponiamo

$$\exists q \in [0, 1) : \sqrt[n]{a_n} \leq q \text{ def. u'n.}$$

Allora

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty$$

Se invece

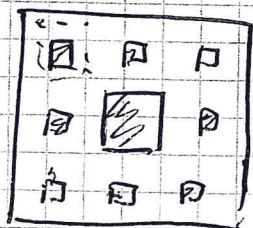
$$\exists q \in (1, +\infty) : \sqrt[n]{a_n} \geq q \text{ def. u'n.}$$

Allora

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty.$$

Note $q=1$ non è incluso nell'enunciato.

ES 6.8.1



Area della
regione colorata

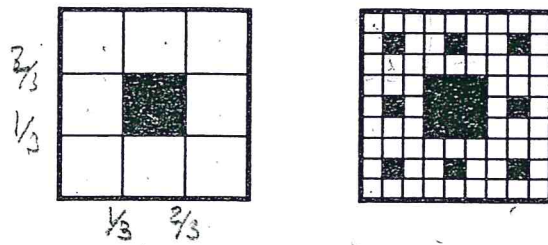


Figura 1.10

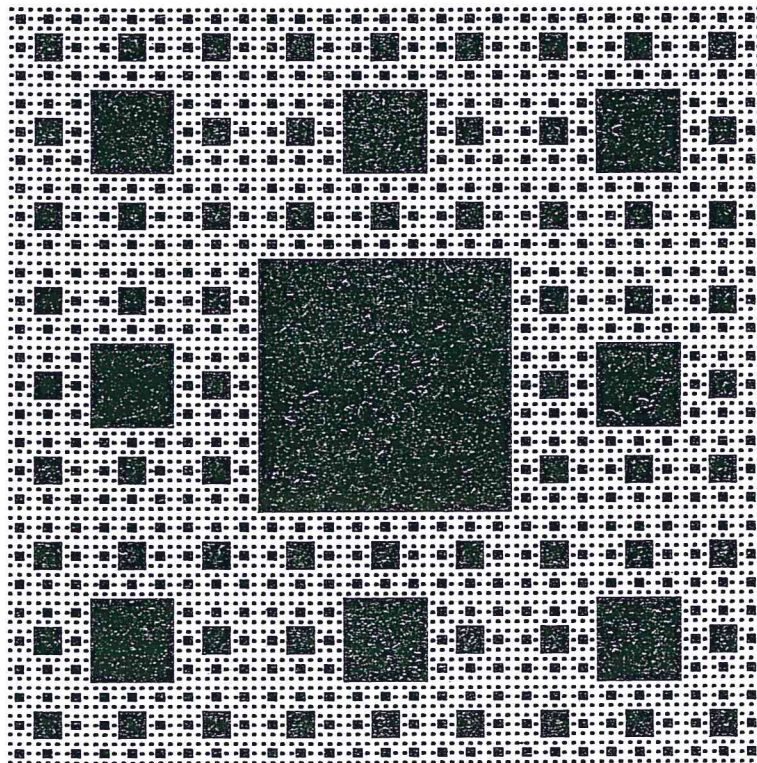


Figura 1.11