

Lezione 5 10/10/18

10-13

1

Abbiamo visto ieri cosa significa
che $E \subseteq \mathbb{R}$ è limitato superiormente
o inferiormente.

Def 5.1.1. Sia $E \subseteq \mathbb{R}$, $E \neq \emptyset$.

Si dice che E è limitato se E è
limitato inferiormente e superiormente.

Questa definizione non ha note a che
vedere con la nozione di limite.

Def 5.1.2 Una funzione $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} (\mathbb{C})$

si chiama successione a valori reali

(complessi).

Molto spesso $f(n)$ viene indicato con
 a_n , con b_n e cetera. In tali casi

la successione viene anche indicata con
 (a_n) , con (b_n) , oppure $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$,
oppure $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

2
Data (a_n) , spesso si indica con

S_n la somma parziale $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$

Anche (S_n) è ^{a sua volta} una successione
reale (o complessa).

Notiamo che data una successione (S_n)

di somme parziali, $S_n = \sum_{k=1}^n b_k$,

possiamo ricavare la successione (b_n)

come segue: $b_n = S_n - S_{n-1}$

Def 5.2.1 La successione ^(reale) (a_n) si dice
monotona crescente (o non decrescente)

se $a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Si dice monotona decrescente (o non
crescente) se $a_n \geq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Si dice monotona se è monotona
crescente oppure monotona decrescente.

LE SERIE A TERMINI POSITIVI

Consideriamo (a_n) successione reale,
e supponiamo $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Costruiamo $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$. La successione

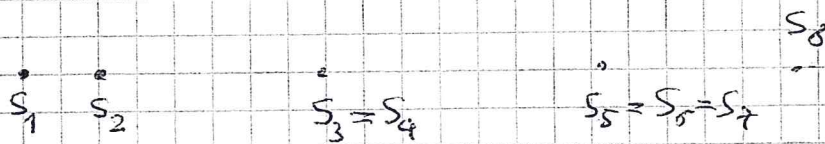
(s_n) è monotonica crescente.

Def 5.3.1. Si indica con

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$$

il $\sup \{ s_n : n \in \mathbb{N} \}$.

Si chiama serie degli a_k .



Ecco una prima fondamentale applicazione del concetto di estremo superiore: ci permette di definire cosa sia una serie a TERMINI POSITIVI.

I problemi sono 2:

- 1) Vedere se l'estremo superiore è finito
- 2) Se sì, calcolarlo.
- 2) tipicamente è impossibile, è possibile solo in rari casi.
- 1) invece è più fattibile.

Def 5.4.1 n dice che $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ è

convergente se $\sup \{S_n : n \in \mathbb{N}\} < +\infty$.

Si dice che è divergente se

$$\sup \{S_n : n \in \mathbb{N}\} = +\infty$$

Dunque, una serie a termini positivi ha 2 sole possibilità: o converge o diverge.

Esempio 5.4.1 Cosa posso dire di

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k \quad (5.4.1)$$

Qui in generale, se $x \in [0, +\infty)$

Cosa posso dire di

$$\sum_{k=1}^{+\infty} x^k \quad (5.4.2)$$

In questo tipo di serie, spesso la somma parte da 0.

Si tratta di capire il comportamento di

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n x^k \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ &= x + x^2 + \dots + x^{n-1} + x^n \end{aligned}$$

Preceduta lezione 2: Vale $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$

$$x^n - 1 = (x-1)(1+x+\dots+x^{n-1})$$

$$(x-1)(1+x+\dots+x^{n-1}) = \cancel{x} + \cancel{x^2} + \dots + \cancel{x^n}$$

$$1 - \cancel{x} - \dots - \cancel{x^{n-1}} = x^n - 1$$

Spesso la formula viene scritta, se $x \neq 1$,

$$\frac{(1-x^n)}{1-x} = 1+x+\dots+x^{n-1}$$

Da cui se $x \neq 1$ si ha che

$$\sum_{k=0}^{n-1} x^k = \frac{1-x^n}{1-x}$$

$$\text{Anche } \sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

$$\text{Anche } \sum_{k=1}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} - 1$$

$$\text{Da cui } S_n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} - 1$$

$$\text{Cioè } S_n + 1 = \sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

Risposta all'esercizio $x=1$: $\sum_{k=1}^{\infty} x^k$
 $= \sup \{1, 2, 3, 4, \dots\} = +\infty$, SERIE DIVERGENTE
ES stessa cosa $x > 1$.

Anche $x=0$ è semplice, $\sum_{k=1}^{+\infty} 0^k = 0$
(dunque converge).

In effetti il caso interessante è

$$x \in (0, 1)$$

Ad esempio $x = 1/3$

$$\sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - 1/3}$$

Qual'è

$$\sup \left\{ \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - 1/3} : n \in \mathbb{N} \right\} ?$$

$$= \frac{1}{1 - 1/3} = 3/2. \quad \text{In fatti}$$

$$1) \quad \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - 1/3} \leq 3/2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$2) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} :$$

$$\frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - 1/3} > \frac{3}{2} - \varepsilon$$

(Ricordare teo 4.40.1)

Dim. la 1):

$$\frac{3 \left(1 - \left(\frac{1}{3} \right)^{n+1} \right)}{2} \leq \frac{3}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N} ?$$

||

$\frac{3}{2}$ qualcosa, con qualcosa < 1

Dunque 1) è vera.

Dim. 2)

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} : \frac{3 \left(1 - \frac{1}{3^{n+1}} \right)}{2} > \frac{3}{2} - \varepsilon$$

$$1 - \frac{1}{3^{n+1}} > \frac{2}{3} \left(\frac{3}{2} - \varepsilon \right) = 1 - \frac{2}{3} \varepsilon$$

$$\frac{1}{3^{n+1}} < \frac{2}{3} \varepsilon,$$

$$\frac{1}{3} \frac{1}{3^n} < \frac{2}{3} \varepsilon, \quad \frac{1}{3^n} < 2\varepsilon,$$

$$3^n > \frac{1}{2\varepsilon} \quad n > \log_3 \frac{1}{2\varepsilon}$$

Ad esempio $n = \lceil \log_3 \frac{1}{2\varepsilon} \rceil$ va bene

Dunque 2) è dimostrato.

La serie dell'es. 54.1 parte 1 è

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3} \right)^k = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

La funzione dell'es 5.4.1 parte 2) è:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x} - 1 \quad \forall x \in (0,1)$$

“per colpa” del fatto
che la somma parte da 1
invece che da 0

PER CASA.

? Quali operazioni sono lecite per
le somme infinite?

Sia $S = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{ES. precedente}}}{=} \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2} \right)$

$$S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots + \dots \quad (5.8.1)$$

Moltiplico per 3 e suppongo di potere fare
tutte le stili operazioni che farei se nello
(5.8.1) invece dello zero avessi un numero finito
di addendi?

$$\begin{aligned} S &= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots \\ 3S &= 3 + \underbrace{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots}_S \end{aligned} \quad \begin{aligned} &\Rightarrow 2S = 3 \\ &\Rightarrow S = 3/2 \end{aligned}$$

Ma queste operazioni NON sempre sono legate

$$T = 1 + 3 + 9 + 27 + \dots$$

$$3T = 3 + 9 + 27 + 81 + \dots$$

$$= \dots - 3 = T - 1 \Rightarrow 2T = -1$$

$$\Rightarrow T = -\frac{1}{2} < 0 !! ?!$$

Alho e sempre curioso:

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$$

Se tutte le operazioni che farei con un numero finito di addendi fossero legate:

$$1 + \frac{1}{2} > \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} > \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

e così via

$$S > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots = S \quad !??!$$

5.10.1 Studiare il carattere di

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots$$

SERIE DI MENGOLOI (serie telescopica)

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\sup \{ S_n : n \in \mathbb{N} \} = \sup \left\{ 1 - \frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$= 1$$

↑ C.A.S.A.

Abbiamo che la serie di Mengoli converge e

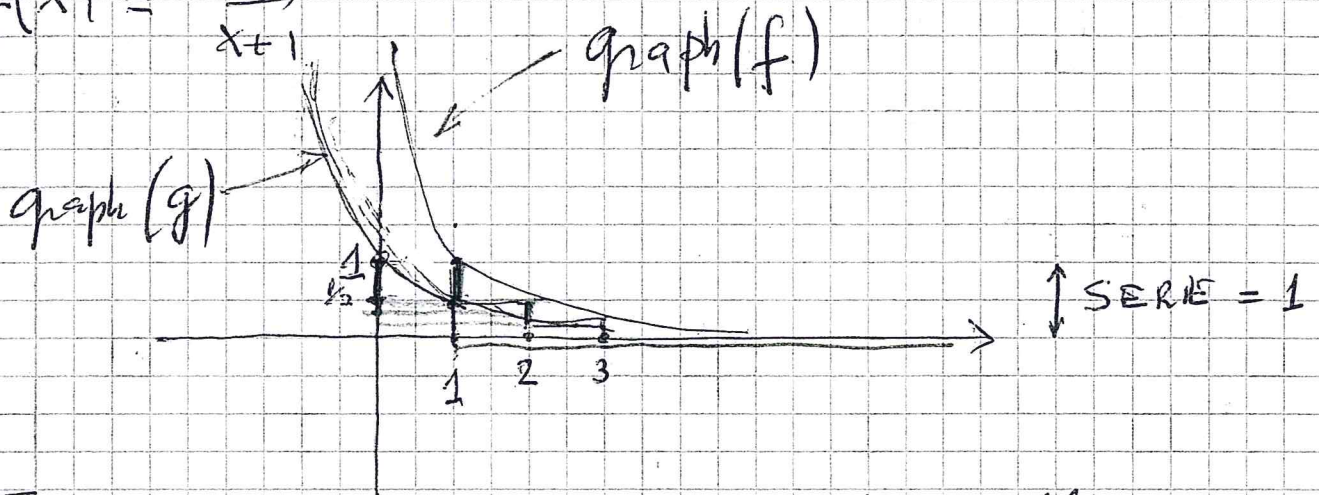
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$$

Interpretazione geometrica di $\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$ 11

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$\forall x \geq 1, x \in \mathbb{R}$$

$$g(x) = \frac{1}{x+1}$$



Il più importante risultato sulle
serie a termini positivi è

Teo 5.11.1 (Principio di confronto).

Siano $(a_n), (b_n)$ due successioni di
numeri reali non negativi. Consideriamo
le serie $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k, \sum_{k=1}^{+\infty} b_k$. Allora:

- 1) Se $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k < +\infty$ e $a_k \leq b_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$
 $\Rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} a_k < +\infty$
- 2) Se $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k = +\infty$ e $a_k \geq b_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$
 $\Rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} a_k = +\infty$

Dim 1) Se $a_k \leq b_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow s_n^A = \sum_{k=1}^n a_k \leq \sum_{k=1}^n b_k = s_n^B \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Poiché $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k < +\infty \iff \sup \{s_n^B : n \in \mathbb{N}\} < +\infty$
per def.

$< +\infty$ Ma

$$s_n^A \leq s_n^B \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$\Downarrow$

$$0 \leq \sup \{s_n^A : n \in \mathbb{N}\} \leq \sup \{s_n^B : n \in \mathbb{N}\} < +\infty$$

$\Downarrow$

$$\sup \{s_n^A : n \in \mathbb{N}\} < +\infty$$

che equivale a dire $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k < +\infty$

2) Se $a_k \geq b_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$

$$\text{Si ha } s_n^A \geq s_n^B \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \sup \{s_n^A : n \in \mathbb{N}\} \geq \sup \{s_n^B : n \in \mathbb{N}\} = +\infty$$

$\Rightarrow \sup \{s_n^A : n \in \mathbb{N}\} = +\infty$, che equivale
a dire $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = +\infty$ $\square$

Una generalizzazione utile.

Def 5.13.1 Se ho una proprietà $P(n)$ che dipende da $n \in \mathbb{N}$, dico che $P(n)$ vale definitivamente (in n) se $P(n)$ è vera da un certo indice in poi, cioè:

$\exists n \in \mathbb{N} : P(m)$ è vera $\forall m \in \mathbb{N}, m \geq n$
Si dice che $P(n)$ è frequentemente vera (in n), se $P(n)$ vale per un numero infinito di indici, cioè:

$\forall n \in \mathbb{N} \exists m \in \mathbb{N} : m > n, P(m)$ è vera.

ES 5.13.1 Se $P(n)$ vale definitivamente allora $P(n)$ vale frequentemente. Il viceversa non è necessariamente vero.

ES 5.13.2
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

Osservo che

$$a_k = \frac{1}{k^2} \leq \frac{2}{k(k+1)} = b_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Indichiamo
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{k(k+1)} = 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 2 < +\infty$$

Dunque, dal teo 5.11.1 4)

Segue $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k < +\infty$.

In definitiva $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ converge

Finalmente, la generalizzazione
del teo. 5.11.1. è:

Teo 5.14.1 Siano $(a_n), (b_n)$ due
successioni di numeri reali non negativi.

1) Se $a_k \leq b_k$ definitivamente in k

e $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k < +\infty$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} a_k < +\infty$.

2) Se $a_k \geq b_k$ definitivamente in k

e $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k = +\infty$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} a_k = +\infty$.

Dom CASA.

« Il carattere di NON È ALTERATO se
ne modifico solo un numero finito di addendi »