

Lezione 4 9/10/18 14-17

stessa dim. di teo 3.4.1:

Es 4.1.1 Dimostrare che i numeri
diadici

$$D = \left\{ \frac{p}{2^k} : p \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \right\}$$

sono densi in $\mathbb{R}$.

Altra ripetizione di es. (ii) lezione 1:

Dimostrare che

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{j=1}^n j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

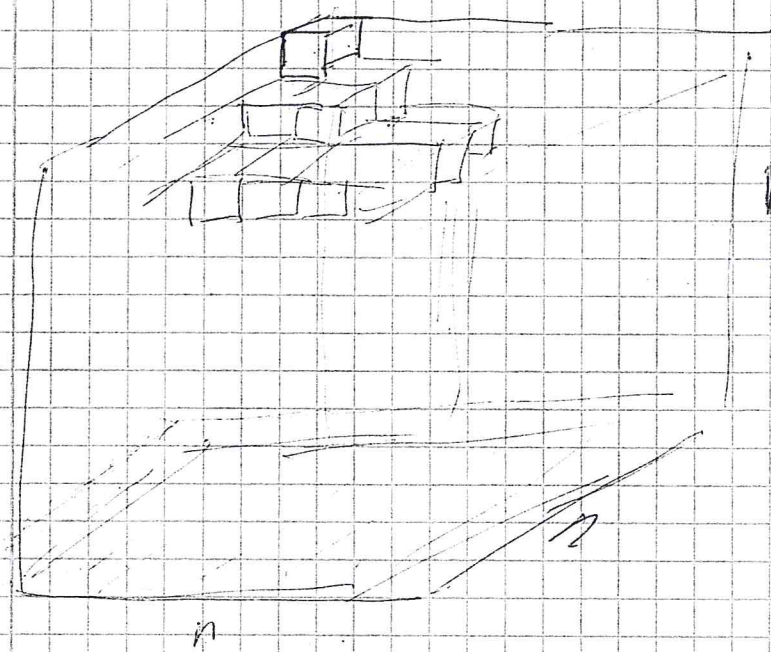
Il modo in cui si fa adesso è
multiplo, perché non pensavo già di
sapere quale è la soluzione: così
calcolare

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{j=1}^n j^2$$

Non posso subito usare l'induzione.
Prima infatti devo immaginare quanto fa
 $\sum_{j=1}^n j^2$

$$\sum_{j=1}^n j^2 = 1 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$$

$$= 1 + 4 + 9 + \dots + n^2$$



3 parte un cubo
 5-2 " "
 7-3 " "

$$(2(n-1)+1)(n-1)$$

$$\sum_{j=1}^n j^2 + ? = n^3 \quad (4.2.1)$$

$$? = \sum_{j=1}^{n-1} j(2j+1) = 2 \sum_{j=1}^{n-1} j^2 + \sum_{j=1}^{n-1} j$$

Entonces sustituyendo en (4.2.1)

$$\sum_{j=1}^n j^2 + 2 \sum_{j=1}^{n-1} j^2 + \sum_{j=1}^{n-1} j = n^3$$

← INCOGNITA

$$\sum_{j=1}^n j^2 + 2 \sum_{j=1}^n j^2 - 2n^2 + \sum_{j=1}^{n-1} j = n^3$$

$$2 \sum_{j=1}^{n-1} j^2$$

$$\sum_{j=1}^n j^2 = \frac{1}{3} \left(n^3 - \sum_{j=1}^{n-1} j + 2n^2 \right)$$

es. c) della lezione 1?

$$= \frac{(n-1)n}{2}$$

$$\sum_{j=1}^n j^2 = \frac{1}{3} \left(n^3 + 2n^2 - \frac{(n-1)n}{2} \right)$$

$$= \frac{2n^3 + 4n^2 - n^2 + n}{6}$$

$$= \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Poi si procede per induzione.

$$\mathbb{Q}^- = \{ q \in \mathbb{Q} : q < 0 \}$$

è superiormente limitata.

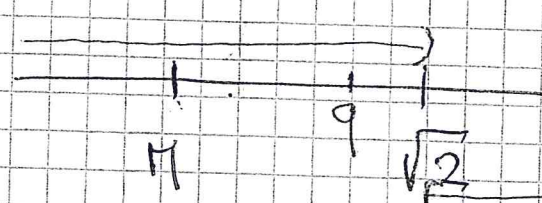
Voglio, se $E \neq \emptyset$, $E \subseteq \mathbb{R}$,

$\text{Major}(E) \neq \emptyset$, definire

$\sup E$.

$E = \{ q \in \mathbb{Q} : q < \sqrt{2} \}$. E superiormente limitata, non vuoto.
 E non ha massimo.

Se E avesse ^{$\sqrt{2}$} massimo, M ,
 allora $M \in E \Rightarrow M \in \mathbb{Q}$, $M < \sqrt{2}$

Ma μ  il Lemma 3.1.1

$$\exists q \in \mathbb{Q} : M < q < \sqrt{2}$$

Ma $q \in E$, ma $q > M \Rightarrow M$ non è il massimo di E , assurdo.

$$B := \text{Major}(E) = \{ m \in \mathbb{R} : m \geq e \ \forall e \in E \}$$

$$A = \{ m \in \mathbb{R} : \exists e \in E : m \leq e \}$$

$$B = \Pi_{\text{aibor}}(E) \neq \emptyset$$

$$A \supseteq E \quad \text{Dunque } A \neq \emptyset$$

è l.s.1. Sia $E \subseteq \mathbb{R}$, $E \neq \emptyset$.

Supponiamo

$$\Pi_{\text{aibor}}(E) \neq \emptyset \quad (\text{l.s.1})$$

Allora

$$\exists! \min(\Pi_{\text{aibor}}(E))$$

Def. l.s.1. Sia $E \subseteq \mathbb{R}$, $E \neq \emptyset$,

$\Pi_{\text{aibor}}(E) \neq \emptyset$. Definisco

$$\sup E := \min(\Pi_{\text{aibor}}(E))$$

Questa è una buona definizione,
grazie al l.s.1.

Definiamo $B := \Pi_{\text{aibor}}(E)$.

Dalla (l.s.1) $B \neq \emptyset$. (di completezza)

Ricordo che $B = \{b \in \mathbb{R} : b \geq e \forall e \in E\}$

Se voglio usare l'assioma a pg 5
della lezione 3 devo dichiarare A.

Definisco

$$A := \{a \in \mathbb{R} : \exists e \in E : e \geq a\}$$

Osservo che

$$A \supseteq E.$$

Di conseguenza, essendo per ipotesi $E \neq \emptyset$, segue $A \neq \emptyset$.

Dimostro che

$$A \cup B = \mathbb{R} \quad (4.6.1)$$

Evidentemente $A \cup B \subseteq \mathbb{R}$, dato che $A \subseteq \mathbb{R}$ e $B \subseteq \mathbb{R}$. Di conseguenza, per dimostrare la (4.6.1) basta vedere

$$A \cup B \supseteq \mathbb{R}.$$

Sia $x \in \mathbb{R}$. Se $x \in B$, ^{caso} $x \geq e \quad \forall e \in E$, allora $x \in A \cup B$.

Se $x \notin B$, allora

$\exists e \in E : e > x$. Di conseguenza $e \geq x$ e perciò $x \in A$.

Dimostro che $\forall a \in A \quad \forall b \in B \quad a \leq b$

Sia $a \in A$. Allora $\exists e \in E, e \geq a$

Ma $b \in B \Rightarrow b \geq e \quad \forall e \in E$

Di conseguenza $b \geq e \geq a$.

« CONCATENANDO A CON B USANDO E »

Abbiamo tutte le ipotesi verificate per applicare l'assioma di completezza?

$\exists! c \in \mathbb{R} \quad a \leq c \leq b \quad (4.7.1)$

$\forall a \in A \quad \forall b \in B$

c è il numero che sto cercando;
infatti dimostriamo che c è il
minimo dei maggioranti di E .

Per fare questo due sono le
proprietà da dimostrare:

1) $c \in \text{Maj}(\mathbb{R})$

2) $c \leq m \quad \forall m \in \text{Maj}(\mathbb{R})$

Dalla seconda disuguaglianza in (4.7.1)

ho $c \leq b \quad \forall b \in B$, così

$c \leq m \quad \forall m \in \text{Maj}(\mathbb{R})$ che è la 2)

Dalla prima disuguaglianza in (6.7.1) ho

$$c \geq a \quad \forall a \in A$$

$$\text{Ma } A \supseteq E \Rightarrow c \geq e \quad \forall e \in E$$

e dunque $c \in \text{Major}(E)$, che è la 1). $\square$

Nota Se $E = \emptyset$ $\sup E = -\infty$.

Abbiamo $\pm\infty$ e consideriamo

$$\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

$$[0, +\infty] = [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$$

$$\text{Se } x \in \mathbb{R}, \quad x + (+\infty) = +\infty$$

$$x + (-\infty) = x - \infty = -\infty$$

$+\infty - \infty$ NON È DEFINITO

$0 \cdot (+\infty)$ NON È DEFINITO

$(0 \cdot (-\infty))$ NON È DEFINITO

$$a \cdot (+\infty) = +\infty \quad \text{se } a > 0$$

$$a \cdot (+\infty) = -\infty \quad \text{se } a < 0$$

DIREMO più in là cosa vuol dire

convergenza a $\pm\infty$.

88 L. 8.1 Se E ammette massimo, $\max E = \sup E$

Def 4.9.1. Sia $E \subseteq \mathbb{R}$, $E \neq \emptyset$

$$\text{MINOR}(E) = \text{insieme dei minoranti di } E \\ = \{x \in \mathbb{R} : x \leq e \quad \forall e \in E\}.$$

Def 4.9.2. $E \subseteq \mathbb{R}$, $E \neq \emptyset$ si dice
inferiormente limitato se $\text{MINOR}(E) \neq \emptyset$.

Def 4.9.3. Se $\text{MINOR}(E) = \emptyset$
si pone $\inf E := -\infty$.

Teo 4.9.1. Sia $E \subseteq \mathbb{R}$, $E \neq \emptyset$.

Supponiamo $\text{MINOR}(E) \neq \emptyset$.

Allora $\exists!$ $\max(\text{MINOR}(E))$.

Def 4.9.4. Nelle ipotesi del teo. 4.9.1

si pone

$$\inf E := \max(\text{MINOR}(E)).$$

Se $E = \emptyset$ si pone $\inf E = +\infty$.

CARATTERIZZAZIONE di $\sup E$, $\inf E$:

serie conietture per fare gli esercizi.

oss 4.9.1. Se E ammette un unico, $\min E = \inf E$.

140

Teo 4.10.1 Sia $E \subseteq \mathbb{R}$, $E \neq \emptyset$.

Supponiamo E inferiormente limitato.

Allora $S = \sup E \iff$

1) $S \geq e \quad \forall e \in E$

2) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists e \in E \quad e > S - \varepsilon$

Dim La 1) è una delle due proprietà

di S , S è un maggiorante di E .

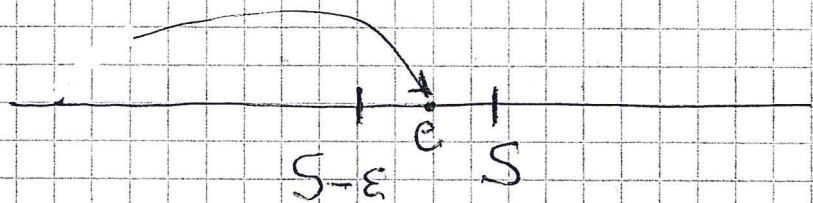
La 2) dice che S è il

minimo dei maggioranti, nella forma:

« qualunque numero più piccolo di S

Non è maggiorante di E »

□



Teo 4.10.2. Sia $E \subseteq \mathbb{R}$, $E \neq \emptyset$. Supponiamo

E inferiormente limitato. Allora $i = \inf E$

$\iff$ 1) $i \leq e \quad \forall e \in E$

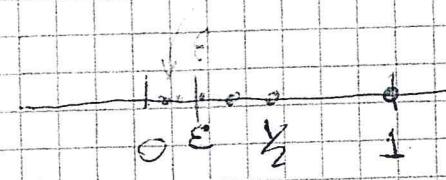
2) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists e \in E : e < i + \varepsilon$

Dim Analoga a quella di teo 4.10.1

□

s. 4.11.1 Sia $E = \left\{ x \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N} : 1 \geq \frac{1}{n} \right\}$

Trovare $\sup E$
 $\inf E$
 $\min E$
 $\max E$



$E \subseteq \mathbb{R} \quad E \neq \emptyset$

E è superiormente limitato ($\Leftrightarrow M_{\text{ador}}(E) \neq \emptyset$)

E è inferiormente limitato ($\Leftrightarrow m_{\text{mor}}(E) \neq \emptyset$)

$\sup E = 1 \in E$
 $\max E = 1$ } (4.11.1)

Per dimostrare (4.11.1), grazie alle oss. 4.8.1, basta dim.

$M := \max E = 1$ (4.11.2)

Per dim. (4.11.2) devo verificare 2 proprietà:

- 1) $1 \in E$ sì ($n=1$)
- 2) $1 \geq e \quad \forall e \in E$ $1 \geq \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$

(Mostriamo che la 2) è condivisa anche da $\inf E$, ma la 1) non necessariamente)

$$\inf E = 0$$

(4.12.1) ¹²

Per dim. la (4.12.1), usiamo il teo 4.10.2:
dobbiamo dim

$$1) \quad 0 \leq x \quad \forall x \in E$$

$$2) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in E \quad x < 0 + \varepsilon = \varepsilon$$

• 1) diventa $0 \leq \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ovvio

• 2) diventa $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < \varepsilon$

cioè $n > \frac{1}{\varepsilon}$. In qualunque $n \in \mathbb{N}$, $n > \frac{1}{\varepsilon}$ va bene. (4.12.2)

ES $\varepsilon = \pi \cdot 10^{-91} = \frac{\pi}{10^{91}}$

$$\frac{1}{\varepsilon} = \frac{10^{91}}{\pi}$$

(risultato (4.12.2))

$$n = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil = \text{parte intera superiore di } \frac{1}{\varepsilon} \quad \checkmark$$

Def 4.12.1 Se $x \in \mathbb{R}$

$$[x] = \lfloor x \rfloor = \max \{ z \in \mathbb{Z} : z \leq x \}$$

$$\lceil x \rceil = [x] + 1$$

Infine $\min(E)$ non esiste, poiché $0 \notin E$.

ES 4.13.1 Sng

13

$$E = \left\{ x \in \mathbb{R} : \exists n, m \in \mathbb{N} : x = \frac{n \cdot m}{n^2 + m^2} \right\}$$

Trovare $\sup E$

$\inf E$

$\max E$ (se c'è)

$\min E$ (se c'è)