

Lezione 3 4/10/2018 9-11

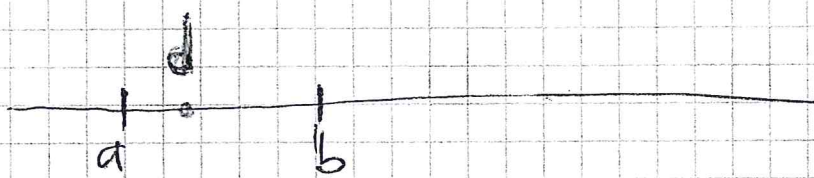
Proprietà di densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$

« preso un qualunque numero reale,
preso un qualunque intervallo contenente
questo numero, in tale intervallo vi
è almeno un numero razionale
(e dunque infiniti numeri razionali) »

Def 3.11 Sia $D \subseteq \mathbb{R}$. D si dice

denso in $\mathbb{R}$ se $\forall a, b \in \mathbb{R}$

$a < b$, $\exists d \in D$, con $a < d < b$.



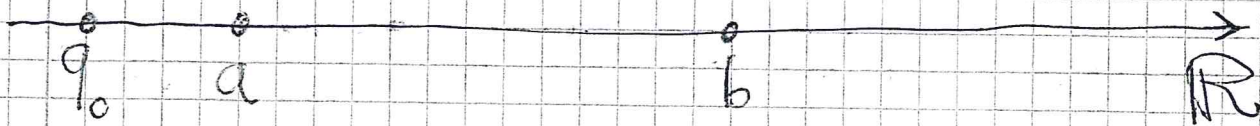
Teo 3.1.1 $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$.

« Come conseguenza, un numero reale
si può approssimare quanto si vuole
con numeri razionali »

« Questo teorema illumina un po' la
struttura di $\mathbb{R}$ »

Dim Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$

$\longleftrightarrow \frac{1}{n}$



Prendiamo $q_0 \in \mathbb{Q}$, $q_0 < a$.

Misura la lunghezza di $(a, b) =$
 $= \{ x \in \mathbb{R} : a < x < b \} = b - a > 0$

Scelgo $n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < b - a$

basta infatti $n > \frac{1}{b-a}$

Nota: $\frac{1}{n} \in \mathbb{Q}$

$E = \{ m \in \mathbb{N} \cup \{0\} : q_0 + \frac{m}{n} > a \}$

$E \subseteq \mathbb{N} \cup \{0\}$

Posso prendere $\bar{m} = \min E$?

Sì, purché $E \neq \emptyset$, equivalentemente
 $\exists m \in \mathbb{N} \cup \{0\} : q_0 + \frac{m}{n} > a$

$$\frac{m}{n} > a - q_0. \quad \text{Basta prendere}$$

$$m > n(a - q_0).$$

Dunque $m \in E$, in particolare $E \neq \emptyset$
 Sia (principio del buon ordinamento
 di $\mathbb{N} \cup \{0\}$) $\bar{m} = \min E$

Definisco $q = q_0 + \frac{\bar{m}}{n}$

e dimostro che q è un numero razionale
 con $a < q < b$.

Inoltre $q_0 \in \mathbb{Q}$, $\frac{\bar{m}}{n} \in \mathbb{Q} \Rightarrow q \in \mathbb{Q}$

Resta da vedere:

$$q > a \quad \text{e} \quad q < b$$

$q > a$: dato che $\bar{m} \in E$, che vuol
 dire $q_0 + \frac{\bar{m}}{n} = q > a$,

$q < b$: poiché $\bar{m} = \min E$, $\bar{m} - 1 \notin E$
 $\Rightarrow q_0 + \frac{\bar{m} - 1}{n} \leq a$

$$q_0 + \frac{m}{n} - \frac{1}{n} \leq a$$

$$q - \frac{1}{n} \leq a$$

$$q \leq a + \frac{1}{n} < a + b - a = b$$

- Si trova in realtà un sottoinsieme proprio di $\mathbb{Q}$, ancora denso in $\mathbb{R}$.
 chiuso per somma, □

Teo 3.4.1 Le frazioni decimali F sono dense in $\mathbb{R}$.

Def 3.4.1

$$F = \left\{ \frac{p}{10^k} : p \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \right\}$$

Esercizio: dimostrazione Teo 3.4.1.

Suggerimento: rifare la. dim. precedente.
 Con $q_0 \in F$, 10^k al posto di n , ecc.
 « Come conseguenza, un numero reale si può approssimare quanto si vuole con frazioni decimali »

3,1415...

$$3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{5}{10^4} = \frac{3 \cdot 10^4 + 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 10 + 5}{10^4} = \frac{p}{10^k}$$

$$\text{con } p = 3 \cdot 10^4 + 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 10 + 5$$

$$k = 4$$

« Illumina ancora di più la struttura di $\mathbb{R}$ ».

Proprietà FONDAMENTALE di $\mathbb{R}$:

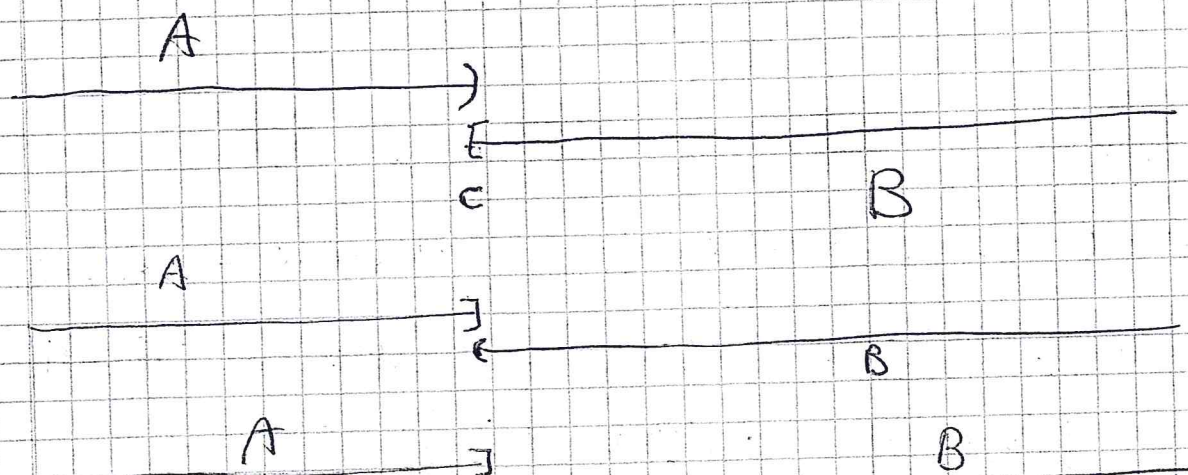
Se $A, B \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$

$$A \cup B = \mathbb{R}$$

$$\forall a \in A \quad \forall b \in B \quad a \leq b$$

Allora $\exists$ unico $c \in \mathbb{R}$

$$a \leq c \leq b \quad \forall a \in A, \forall b \in B$$



? Se $A, B \subseteq \mathbb{Q}$, $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$
 $A \cup B = \mathbb{Q}$

$$\forall a \in A \quad \forall b \in B \quad a \leq b$$

Allora $\exists c \in \mathbb{Q}$:

$$a \leq c \leq b \quad \forall a \in A \quad \forall b \in B \quad ? \text{ NO}$$

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : x < \sqrt{2}\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{Q} : x > \sqrt{2}\}$$

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : x \leq \sqrt{2}\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{Q} : x \geq \sqrt{2}\}$$

↓

Queste proprietà giocano un ruolo determinante da qui in poi.

Def 3.6.1 Sia $E \subseteq \mathbb{R}$, $E \neq \emptyset$.

$m \in \mathbb{R}$ si dice maggiorante di E

se $m \geq e \quad \forall e \in E$

$$E = [0, 2) \quad m = 2, m = 3, m = 1000 \text{ sono}$$

maggioranti di E

$E = \mathbb{Q}^+$; non ammette maggioranti,

più precisamente l'insieme dei maggioranti
di E è vuoto.

Def. 3.7.1 Se $E \subseteq \mathbb{R}$, $E \neq \emptyset$

$$\text{MAIOR}(E) = \{m \in \mathbb{R} : m \text{ maggiorante di } E\}$$

es. 3.7.1 Se $E = [0, 1]$

$$\text{MAIOR}(E) = [1, +\infty)$$

$$\text{Se } E = [0, 1]$$

$$\text{MAIOR}(E) = [1, +\infty)$$

$$\text{Se } E = \mathbb{Q}^+$$

$$\text{MAIOR}(E) = \{\emptyset\}$$

Def. 3.7.2 Sia $E \subseteq \mathbb{R}$, $E \neq \emptyset$.

Se $\text{MAIOR}(E) = \{\emptyset\}$ definisco

$$\sup E := +\infty$$

altrimenti definisco $\sup(E)$

in un insieme che invece ha maggioranti

Def. 3.7.3. Sia $E \subseteq \mathbb{R}$, $E \neq \emptyset$. Si dice

che E è superiormente limitato se

$$\text{MAIOR}(E) \neq \{\emptyset\}$$

ES 3.8.1 $\mathbb{N}$ è superiormente limitato? ¹⁸ NO

$(-\infty, 7]$ " " " ? SI

$(4, +\infty)$ " " " ? NO

$$\sup \mathbb{N} = +\infty$$

$$\sup (4, +\infty) = +\infty$$