

15/1/19

Lettore 36

16-17

1

- 1) Per quali valori del parametro $x \in \mathbb{R}$ la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{2\pi x - \pi}{4(x-2)} \right) \right]^n$$

converge?

Per quali non converge?

- 2) L'ordine di infinitesimo per $x \rightarrow 0^+$ di

$$\log((\cos x)^2) + \frac{1}{x} \int_0^x \log \sqrt{1+t^2} dt + \frac{11}{12} x^2$$

è ?

La costante di fronte è ?

3) Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ una
 (e derivabile con derivata continua)
 funzione continua tale che:

1) $f(x) = f(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

2) $f'(x) < 0 \quad \forall x \in (0, 1)$

3) $f(x) = 0 \quad \forall x \geq 1$

Sia $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione
 definita come:

$$F(x) = - \int_x^{+\infty} f(t) dt \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

1) il segno di F è?

2) i limiti $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} F(x) = ?$

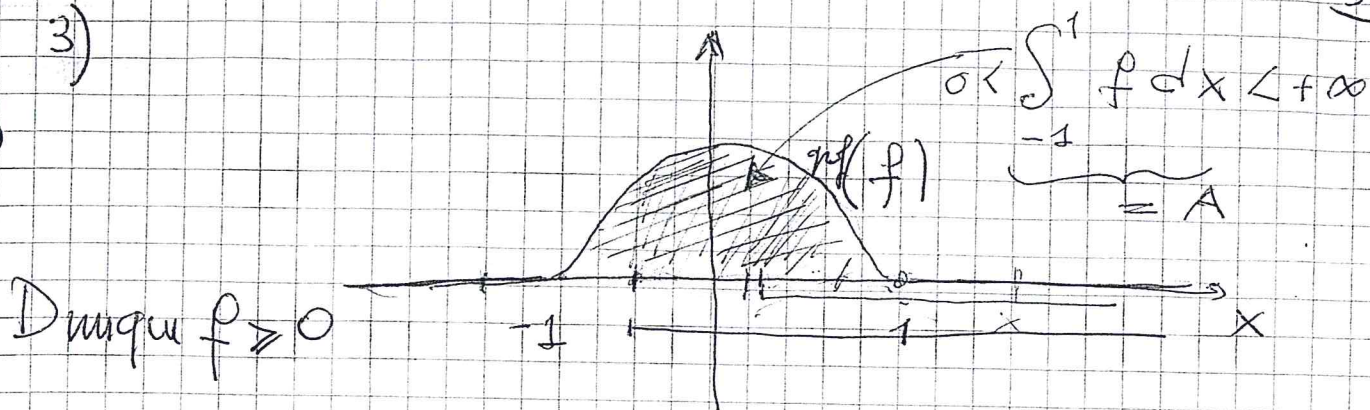
3) F è derivabile? F è integrabile
 in senso improprio su $\mathbb{R}$?

4) Esiste qualche punto di min/max
 assoluto di F ?

5) Il grafico approssimativo di F è?

3)

3



$$F(x) = - \int_x^{+\infty} f(t) dt \quad \text{è ben definito} \\ \forall x \in \mathbb{R}$$

perché f è zero fuori da $[-1, 1]$.

$$F \leq 0$$

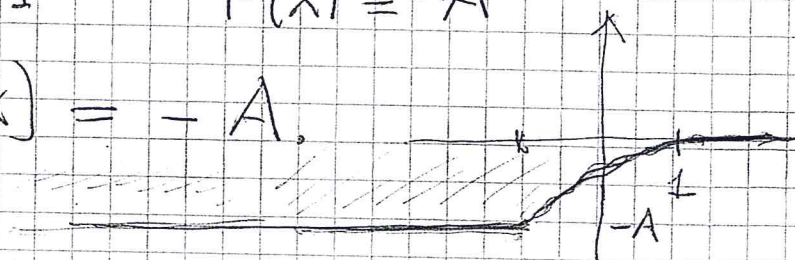
$$\text{Se } x > 1 \quad F(x) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$$

$$\text{Se } x < -1 \quad F(x) = - \int_x^{+\infty} f dt = - \int_{-1}^1 f dt$$

$$\Rightarrow \text{Se } x < -1 \quad F(x) = -A$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = -A.$$



Dal teo fond. del calcolo F è derivabile.

F non è int. in senso improprio, $\int F dx = -\infty$
 F è crescente; $(-\infty, 1]$ punti di min. a sinistra

$[1, +\infty)$ sono tutti punti di massimo assoluto. 4

$$2) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{2\pi x - \pi}{4(x-2)} \right) \right]^n$$

Conv. assoluta: applico criterio dello
radice.

$$\downarrow$$
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \left| \operatorname{arctg} \left(\frac{2\pi x - \pi}{4(x-2)} \right) \right|^n$$

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n} \left| \operatorname{arctg} \left(\frac{2\pi x - \pi}{4(x-2)} \right) \right|^n}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\sqrt[n]{n}}}_{\downarrow} \left| \operatorname{arctg} \left(\frac{2\pi x - \pi}{4(x-2)} \right) \right|$$

$$\underline{1}$$

$$\text{Cerca } x \in \mathbb{R}: \left| \operatorname{arctg} \left(\frac{2\pi x - \pi}{4(x-2)} \right) \right| < 1$$

per questi x ho convergenza assoluta
e dunque convergenza.

$$\operatorname{arctg} |y| = |\operatorname{arctg} y| \quad (5.1)$$

$$\text{se } y > 0 \quad |y| = y \Rightarrow \operatorname{arctg} |y| = \operatorname{arctg} y$$

$$\text{se } y > 0 \quad \operatorname{arctg} y > 0 \Rightarrow \operatorname{arctg} y = |\operatorname{arctg} y|$$

$$\Rightarrow \text{se } y > 0 \quad |\operatorname{arctg} y| = \operatorname{arctg} |y|$$

$$\text{se } y < 0 \quad |y| = -y \Rightarrow \operatorname{arctg} |y| = \operatorname{arctg} (-y) \\ = -\operatorname{arctg} y$$

$$\text{se } y < 0 \quad \operatorname{arctg} y < 0 \Rightarrow -\operatorname{arctg} y = |\operatorname{arctg} y| \\ \Rightarrow \text{se } y < 0 \quad |\operatorname{arctg} y| = \operatorname{arctg} |y|.$$

In definizione (5.1) è vero $\forall y \in \mathbb{R}$

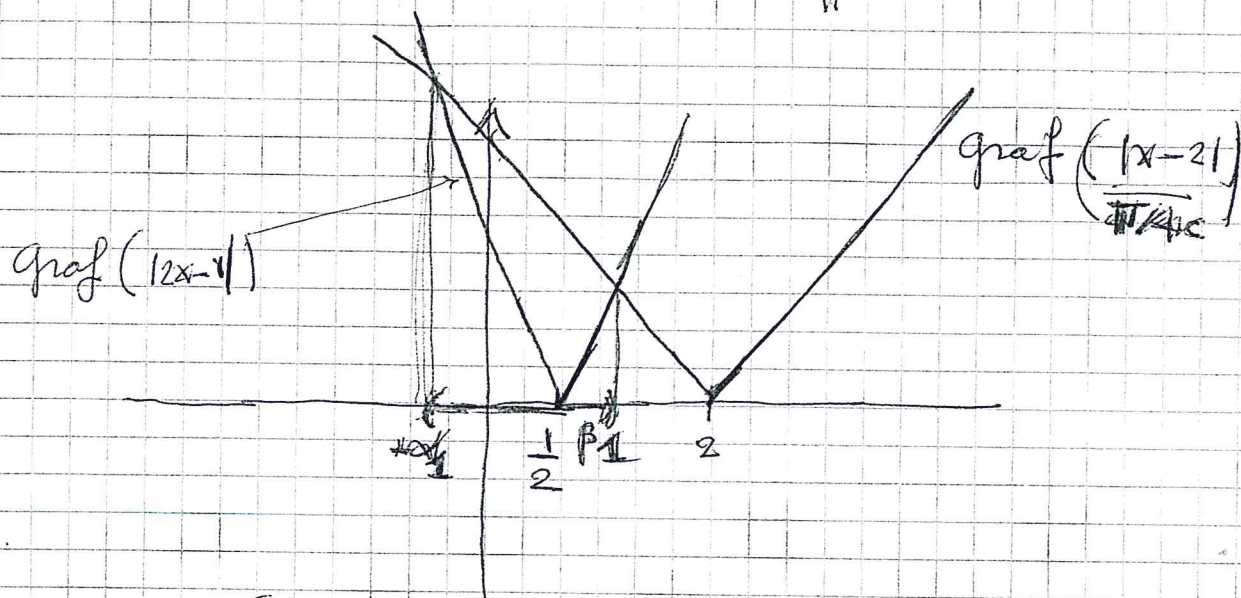
$$\text{Per } x \in \mathbb{R}: \quad \operatorname{arctg} \left| \frac{2\pi x - \pi}{4(x-2)} \right| < 1$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{2\pi x - \pi}{4(x-2)} \right| < \cancel{1} \quad c = \frac{1}{\pi}$$

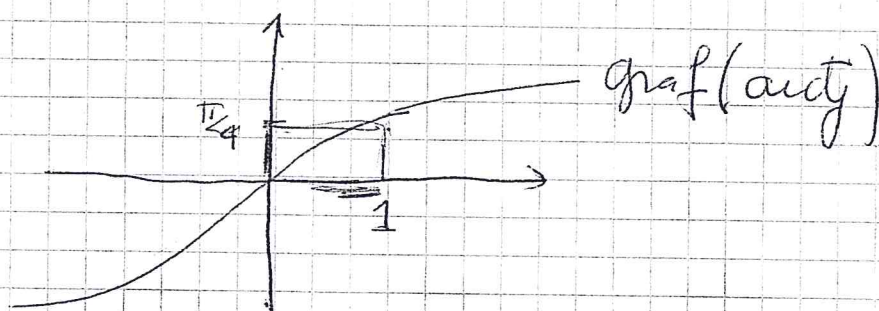
$$\Leftrightarrow \left| \frac{2x - 1}{4(x-2)} \right| < \cancel{\frac{1}{\pi}} \quad \frac{c}{\pi}$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{2x - 1}{x - 2} \right| < \frac{4c}{\pi}$$

$$2|x - \frac{1}{2}| = |2x - 1| < |x - 2| \frac{4e}{\pi}$$



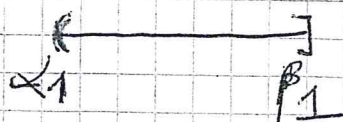
$\forall x \in (\alpha_1, \beta_1)$ la serie converge



$$x = \beta_1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \left[\arctan\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right]^n$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \quad \text{Converge}$$

$$x = \alpha_1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \left[\arctan\left(\frac{\pi}{4}\right) \right]^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \quad \text{diverge}$$



7

Per x tale che $\arctg\left(\frac{2\pi x - \pi}{4(x-2)}\right) > 1$

la serie diverge.

$$\left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1\right)$$

Per $x \rightarrow 0$ si ha:

$$\log((\cos x)^2) = \log\left(1 + \overbrace{((\cos x)^2 - 1)}^y\right)$$

$$(\cos x)^2 - 1 = \underbrace{-x^2 + \frac{x^4}{3} + o(x^4)}_y$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$$

$$(\cos x)^2 = 1 + \frac{x^4}{4} - x^2 + \frac{x^4}{12} + o(x^4)$$

$$\log(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + o(y^2)$$

$$\begin{aligned}\log((\cos x)^2) &= -x^2 + \frac{x^4}{3} - \frac{1}{2}x^4 + o(x^4) \\ &= -x^2 - \frac{1}{6}x^4 + o(x^4)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2 \log(\cos x) &= 2 \log\left(1 + (\cos x - 1)\right) \\ &= 2 \log\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right) \\ &= -x^2 - \frac{x^4}{6} + o(x^4)\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2x} \int_0^x \log(1+t^2) dt$$

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \left(\frac{f'''(0)}{6}x^3 + o(x^3) \right)$$

$$\text{per } x \rightarrow 0$$

$$f(0) = 0$$

$$f'(x) = \log(1+x^2) \Rightarrow f'(0) = 0$$

$$f''(x) = \frac{2x}{1+x^2} \Rightarrow f''(0) = 0$$

$$f'''(0) = 2$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{2x^3}{6} + o(x^3) = \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2x} \int_0^x \log(1+t^2) dt = \frac{x^2}{6} + o(x^2)$$

Si ha globalmente:

$$-x^2 + o(x^2) + \frac{x^2}{6} + o(x^2) + \frac{11}{12}x^2 =$$

$$\frac{1}{12}x^2 + o(x^2)$$

ordine 2, costante $\frac{1}{12}$