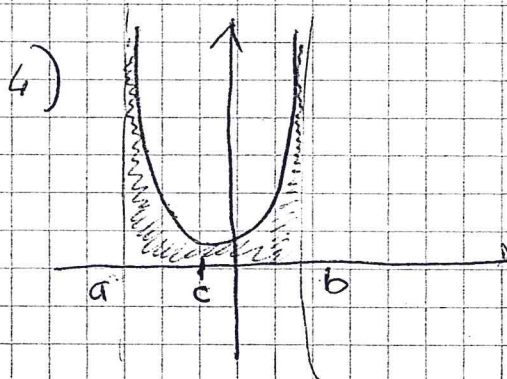
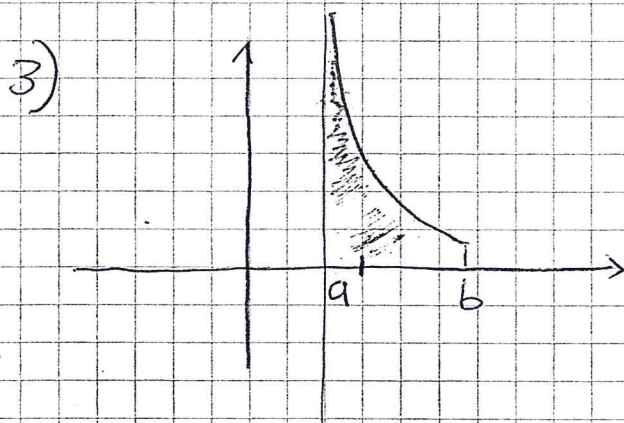
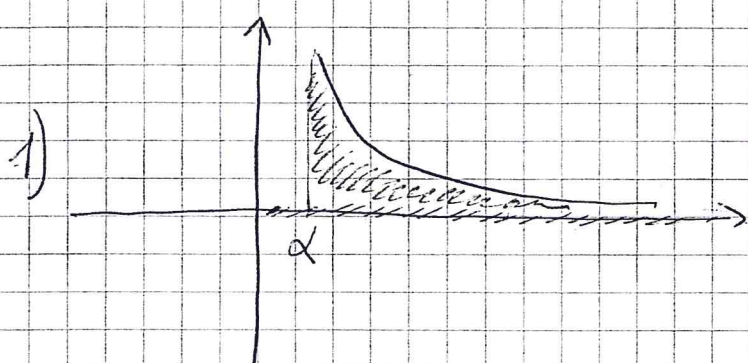


Integrali impropri (o generalizzati)

Si tratta integrali che sono calcolati facendo dei limiti. I casi sono:



$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \quad \text{(casi 1), 2)}$$

o integrali di funzioni non limitate
(come in 3), 4)

Risulta che questi integrali si calcolano
come segue:

caso 1), 2): si ha

$$\int_{\alpha}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{p \rightarrow +\infty} \int_{\alpha}^p f(x) dx \quad (35.2.1)$$

quando il membro destro è finito si dice che f è integrabile in senso improprio su $[\alpha, +\infty)$.

Nel caso 3): si ha

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx \quad (35.2.2)$$

quando il membro destro è finito si dice che f è integrabile in senso improprio su $(a, b]$

Nel caso 4): si ha

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad (35.2.3)$$

con $c \in (a, b)$, e $\int_a^c f(x) dx$ e $\int_c^b f(x) dx$ definiti come nella (35.2.2). Si può dim. che $\int_a^b f(x) dx$ non

dipende da c .

ES 35.3.1 (i) Dire per quali $\alpha > 0$

la funzione $\frac{1}{x^\alpha}$ è i.c.s.i su $(0,1]$

(ii) Dire per quali $\beta > 0$

la funzione $\frac{1}{x^\beta}$ è i.c.s.i su $[1, +\infty)$

(i) $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$ del tipo 3)

$$\varepsilon \in (0,1), \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} [\log x]_\varepsilon^1 = -\log \varepsilon & \alpha = 1 \\ \frac{1}{-\alpha+1} \left[x^{-\alpha+1} \right]_\varepsilon^1 = \frac{1}{1-\alpha} \left(\frac{-1}{\varepsilon^{\alpha-1}} + 1 \right) & \alpha \neq 1 \end{cases}$$

Faccendo l'us dei membri
destri si ha: $\varepsilon \rightarrow 0^+$

Se $\alpha = 1$ $\frac{1}{x^\alpha}$ non è i.c.s.i su $(0,1]$

Se $\alpha > 1$ $\frac{1}{x^\alpha}$ non è i.c.s.i su $(0,1]$

Se $0 < \alpha < 1$ $\frac{1}{x^\alpha}$ è i.c.s.i su $(0,1]$

(ii) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\beta} dx$ del tipo 1)

$$\int_1^p \frac{1}{x^\beta} dx = \begin{cases} \log p & \beta = 1 \\ \frac{1}{1-\beta} (-1 + p^{1-\beta}) & \beta \neq 1 \end{cases}$$

4
Facendo $\lim_{p \rightarrow +\infty}$ dei membri destri si ha:

se $\beta = 1$ $\frac{1}{x^\beta}$ non è i.c.s.i. su $[1, +\infty)$

se $\beta > 1$ $\frac{1}{x^\beta}$ è i.c.s.i. su $[1, +\infty)$

se $\beta < 1$ $\frac{1}{x^\beta}$ non è i.c.s.i. su $[1, +\infty)$

Teo 35.4.1 (comportamento asintotico)

Se $f, g: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ positive

se $\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \text{const} > 0$

allora

f i.c.s.i. su $[1, +\infty)$



g i.c.s.i. su $[1, +\infty)$

E valgono gli analoghi risultati
negli altri casi,

Es 35.5.1 (i) Dire in quali $x > 0$

5

$$\frac{1}{x |\log x|^\alpha} \quad \text{è i.i.s.i. in } (0, \frac{1}{2}]$$

(ii) Dire in quali $\beta > 0$

$$\frac{1}{x (\log x)^\beta} \quad \text{è i.i.s.i. in } [2, +\infty)$$

Es 35.5.1 6sa dire se

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x^2 - 1|^{\frac{1}{2}} (\log(x))^2}{|x|^{\frac{5}{2}} \log|x|} dx$$

Cioè: la funzione sotto il segno di $\int$ è i.i.s.i. su $(-\infty, +\infty)$ o no?

Bisogna studiare l'ordine di un punto "vicino a $\pm \infty$ "

Per $x \gg 1$: numeratore $\sim x$
denominatore $x^{\frac{5}{2}} \log x$

la funzione per $x \gg 1 \sim \frac{1}{x^{\frac{3}{2}} \log x}$

Altrimenti le (35.4.1) in valore k

ho i.i.s.i. «vicino a $+\infty$ », mentre
dove le

$$\frac{1}{x^{3/2} \log x}$$

è i.i.s.i. «vicino

a $+\infty$ » $\rightarrow$ 0 meno. A casa.

A $-\infty$ è una cosa simile.

Resta da capire il comportamento
dell'integrando per x vicino a 0 e a 1.
Per x vicino a zero ho un

comportamento tipo

$$\frac{1}{|x|^{1/2} \log |x|}$$

Completare la cosa.